CPE 332 Computer Engineering Mathematics II

Week 6

Part II, Chapter 5 Random Process

MarKov Process

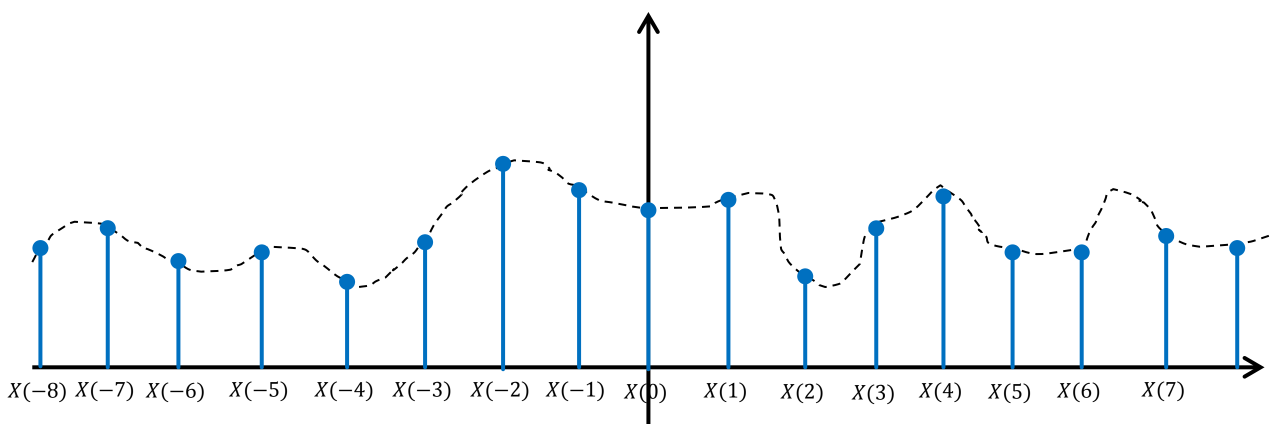
Chapter 6: Introduction to Queuing

Today Topics

- Random Process
  - Stationary: สถิติไม่เปลี่ยน
  - Ergodic: Ensemble Average=Time Average
  - Autocorrelation
  - Cross Correlation
- ต่อ
- Counting Process
- MarKov Process

Discrete-Time Random Process

- อาจจะได้จากการสุ่มตัวอย่าง (Sampling) ของ Continuous RP
  - Uniform Sampling ด้วย Sampling Period $T = \frac{1}{fs}$
- เราได้ $\ldots, \mathrm{X}(-\mathrm{T}), X(0), X(T), X(2T), X(3T), \ldots$
- ปกติจะละ Sampling Period ไว้ฐานที่เข้าใจ เราได้ $\ldots, X(-1), X(0), X(1), X(2), X(3), \ldots$
- มักจะเขียนในลักษณะ $X(n); n = integer$



จำกัด Sequence ความยาว N

- ค่า Autocorrelation สำหรับ N Samples
  - สมการจะลดรูป เหลือแค่ Sum และเฉลี่ย N Point แต่จะเกิดการ Biased เพราะเราเฉลี่ยน้อยกว่านั้น

$$R_{XX}(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)x(n+m); & 0 \le m \le N-1 \\ R_{XX}(-m)\,; & -N+1 \le m < 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{Biased}$$

ดังนั้นการคำนวณที่ไม่ Biased จะเป็นค่าที่ Normalized จากจำนวนจุดของการคำนวณจริงๆ และเราได้

$$R_{XX}(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{N-|m|} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)x(n+m); & 0 \le m \le N-1 \\ R_{XX}(-m)\,; & -N+1 \le m < 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{Non - biased}$$

Sequence ทั่วไป

ในกรณีที่สัญญาณไม่ได้เริ่มจาก $n = 0$ และ/หรือทั้งสอง Random Variable มีความยาวไม่เท่ากัน ผลลัพธ์ที่ได้จะมีความยาวของ Sequence $N + M - 1$ โดยที่ N และ M เป็นความยาวของทั้งสอง Variable และในกรณีนี้ค่า Index ของ Summation จะเปลี่ยนไป อย่างไรก็ตาม สมการข้างล่างยังใช้ได้อยู่สำหรับ Raw Data ที่ไม่ได้ทำการ Normalized

$$R_{XX}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+m)\,; -\infty < m < \infty \quad \text{Raw Data}$$

$$R_{XY}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n+m)\,; -\infty < m < \infty \quad \text{Raw Data}$$

[illegible] Correlation

- 1. ด้วยวิธีกราฟ
  - X(n) คูณ X(n+m) คือ X(n) ที่เลื่อนไปซ้าย m ตำแหน่ง
    - X(n-m) จะเลื่อนไปด้านขวาแทน
  - จากนั้นทำการคูณตัวอย่างที่ตำแหน่งเดียวกันและจับผลลัพธ์มาบวกกัน(Summation)
  - ถ้าเป็น Autocorrelation ทำแค่ครึ่งเดียว เพราะ Rxx(m) เป็น Even Function
    - Cross Correlation ต้องทำทั้งสองด้าน

คุณสมบัติของ Correlation

- 2. ด้วยการแตก Summation
  - $R_{XX}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+m) = R_{XX}(-m)$
  - $R_{XY}(\pm m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n \pm m)$, not Even
  - Index ของ Summation จะสิ้นสุดแค่ Index ของ x(n) ก็พอ เพราะที่เหลือจะเป็น ศูนย์
  - เช่น $x(n) = \{2, \underline{1}, -1, 3\}$, $y(n) = \{1, 2, 1, \underline{-1}, -3, 4, 5\}$

    -1 0 1 2   -3 -2 -1 0 1 2 3
  - $R_{XX}(2) = \sum_{n=-1}^{2} x(n)x(n+2) = R_{XX}(-2)$
    - $= x(-1)x(1) + x(0)x(2) + x(1)x(3) + x(2)x(4)$
    - $= 2(-1) + 1(3) + (-1)\cdot 0 + 3\cdot 0 = 1 = R_{XX}(-2)$
  - $R_{XY}(-1) = \sum_{n=-1}^{2} x(n)y(n-1) \neq R_{XY}(1)$
    - $= x(-1)y(-2) + x(0)y(-1) + x(1)y(0) + x(2)y(1)$
    - $= 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 3\cdot(-3) = -3$

Random Process [illegible]

- Counting Process
- Birth and Death Process
- Poisson Process
- MarKov Process
- MarKov Chain

Counting Process

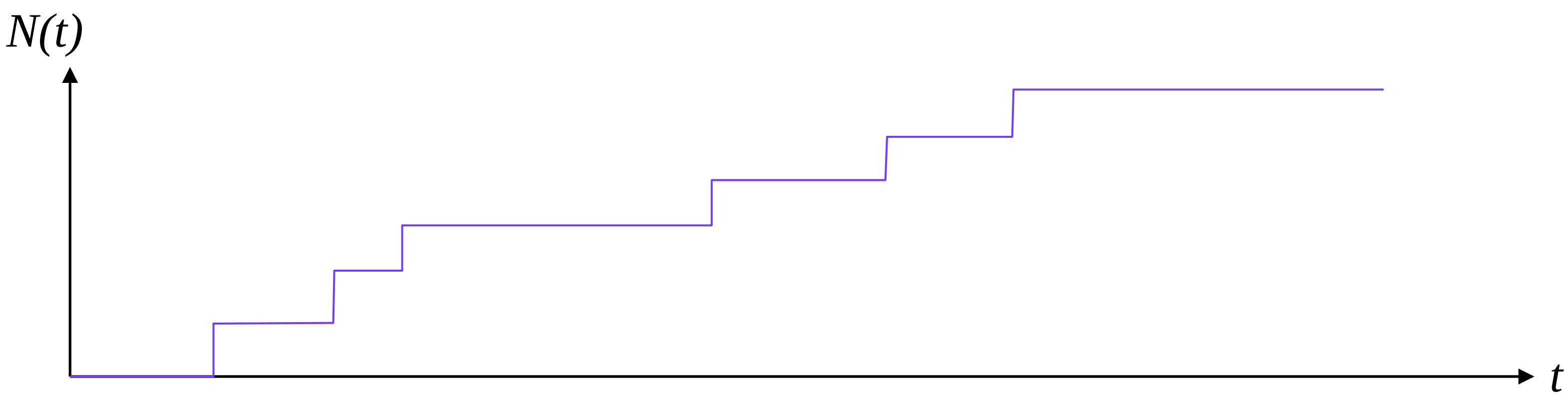
นิยาม $\{N(t), t \geq 0\}$ จัดว่าเป็น **counting process** เมื่อ

(1) $N(0) = 0$,

(2) $N(t)$ มีค่าเฉพาะเป็น integer ที่มีค่าบวก,

(3) ถ้า $s < t$ เราจะได้ $N(s) < N(t)$, และ

(4) $N(t) - N(s)$ เป็นจำนวนของ event ที่เกิดขึ้นหลัง s จนถึง t นั่นคือในช่วงเวลา $(s, t]$



Poisson Process

นิยาม Counting process $\{N(t),\ t \geq 0\}$ ใดๆ จะเป็น **Poisson Process** ด้วยอัตรา $\lambda > 0$ ถ้ามันเป็นไปตามข้อกำหนด 4 ข้อ ดังนี้

(1) Process เป็น independent increment (แต่ละ event ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาที่ไม่คาบเกี่ยวกัน จะไม่ขึ้นต่อกัน)

(2) การเพิ่มขึ้นของ process เป็น stationary (Distribution ของจำนวนของ event ในช่วงระยะเวลาหนึ่งจะขึ้นอยู่กับเฉพาะความยาวของช่วงเวลา และไม่ขึ้นกับเวลาที่มันเริ่มต้น)

(3) Probability ที่หนึ่ง event เกิดขึ้นในช่วงเวลาใดๆที่มีความยาว h จะเท่ากับ $\lambda h + o(h)$ [1] กล่าวคือ

$$P[N(h) = 1] = \lambda h + o(h)$$

(4) Probability ที่จะมีมากกว่าหนึ่ง event เกิดขึ้นในช่วงเวลาใดๆที่มีความยาว h เท่ากับ $o(h)$ กล่าวคือ

$$P[N(h) \geq 2] = o(h)$$

---

[1] $o(h)$ อ่าน “little-oh” ของ h ตามนิยามหมายถึงว่าถ้า $f(x) = o(g(x))$ แล้วแปลว่า $f(x) = O(g(x))$ แต่ $f(x) \neq \Theta(g(x))$ ซึ่งถ้า $f = o(h)$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$

Poisson Process

- ถ้าแต่ละเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นเป็น Random และไม่ขึ้นต่อกัน มันจะเป็น Poisson
  - Probability ที่จะมี k เหตุการณ์เกิดในช่วงเวลา t สามารถคำนวณได้จากสูตร (ดูหน้าถัดไป)
  - ระยะเวลาระหว่างสองเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น เรียก Inter-arrival time, τ, จะมีการกระจายแบบ Exponential ด้วยค่าเฉลี่ย 1/λ,
    - $F_X(\tau) = P[X \leq \tau] = 1 - \lambda e^{-\lambda\tau}, f_X(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$

Poisson Process

ทฤษฎีบท ให้ $\{N(t), t \geq 0\}$ เป็น Poisson process ด้วยอัตรา $\lambda > 0$ ดังนั้นค่า Random Variable Y ซึ่งคือจำนวนของ event ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาใดใดของ $t > 0$ จะมีการกระจายแบบ Poisson ที่มีค่า parameter เท่ากับ λt กล่าวคือ

$$P[Y = k] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

นั่นก็คือค่าเฉลี่ยของจำนวน event ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา t เท่ากับ λt

ทฤษฎีบท ให้ $\{N(t), t \geq 0\}$ เป็น Poisson process ด้วยอัตรา λ ให้ $0 < t_1 < t_2 < \ldots$ เป็นเวลาที่ต่อเนื่องกันที่เกิด event และให้ ช่วงเวลา $\{\tau_n\}$ เรียก **Interarrival time** โดย

$$\tau_1 = t_1, \tau_2 = t_2 - t_1, \ldots, \tau_k = t_k - t_{k-1}, \ldots$$

ดังนั้นค่า Interarrival time $\{\tau_n\}$ จะเป็น exponential random variable ที่เป็น mutually independent identically distributed(iid) ซึ่งแต่ละอันจะมีค่า mean เท่ากับ $1/\lambda$

Birth and Death Process

5.6 Birth-and-Death Process

ในระบบหนึ่งๆ นอกจากจะมี Event ที่เกิดขึ้นในระบบแล้ว ยังมี Event ที่จบลงอีกด้วย การเกิด Event เราเรียกว่า Birth ซึ่งจะถูกกำหนดโดย Birth Rate ซึ่งก็คือค่า λ ในการศึกษาระบบที่มีขนาดไม่ใหญ่นัก ค่าของ Birth Rate จะขึ้นอยู่กับจำนวนของประชากรในขณะนั้น ในกรณีนี้ค่า Birth Rate จะเป็น λ_n

สำหรับอัตราการจบลงของ Event เราเรียก Death Rate และปกติค่านี้จะขึ้นอยู่กับจำนวนของประชากรเช่นกัน ค่าของ Death Rate เราให้เป็น μ_n ในกรณีพิเศษ mujProcess ใดๆที่มีแต่การเกิด กล่าวคือ $\mu_n = 0$ เราจะเรียกระบบนั้นว่าเป็น Pure-Birth Process

ระบบที่ประกอบไปด้วยทั้งการเกิดและการตาย เราเรียก Birth-and-Death Process พึงสังเกตอย่างหนึ่งว่า Poisson Process ที่เรากล่าวในหัวข้อก่อนนั้น ความจริงแล้วก็คือกรณีพิเศษของ Birth-and-Death Process ที่เป็น Pure-Birth Process ที่มี Birth Rate คงที่

State Diagram

- พิจารณาจากระบบ มีทั้ง Birth ด้วย Birth Rate $\lambda(t)$ และ Death ด้วย Death Rate $\mu(t)$
  - เมื่อเราให้ระบบทำงาน ในระบบจะไม่มีอะไรอยู่ เราเรียกว่าอยู่ที่ State 0
  - เมื่อมีหนึ่ง Event เข้ามา หรือ Birth ระบบจะมี Event เพิ่มขึ้นและจะไปอยู่ที่ State ที่มากกว่าปัจจุบัน “หนึ่ง”
  - เมื่อมีหนึ่ง Event จบลง (Death) ระบบจะลด State ลงหนึ่ง
  - ค่า State ของระบบคือจำนวน Event ที่มีอยู่ในระบบ
  - การกระโดดไปยัง State ที่สูงกว่า หรือต่ำกว่า สามารถกำหนดด้วย Probability และเขียนได้ในลักษณะของ State Diagram
    - ถ้าระบบไม่มีการจดจำ เราเรียก Diagram นี้เป็น MarKov Model
    - ระบบคือ MarKov Process
    - การ Transition จาก State หนึ่ง ไปอีก State หนึ่ง กำหนดได้โดยค่า Probability ที่คงที่

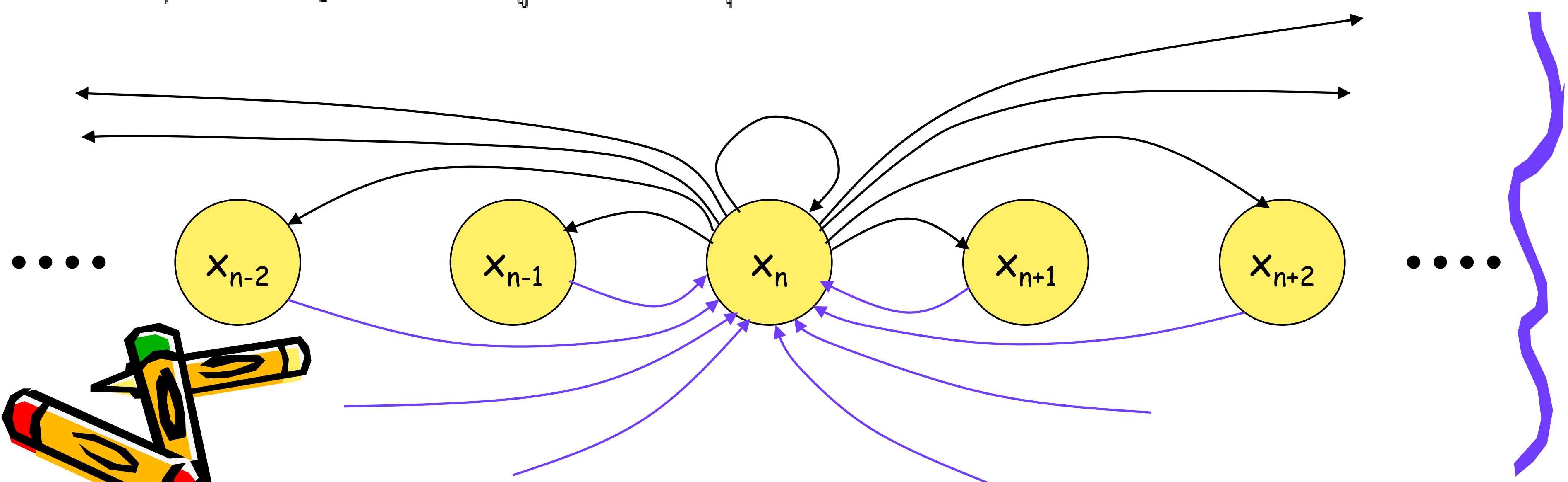
MarKov Process and Markov Chain

Stochastic Process ใดใดของ $\{X(t), t \in T\}$ จัดว่าเป็น **Markov Process** เมื่อมี set ที่ประกอบไปด้วย $n+1$ ค่า
ของ $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ ใน index set และ set ของ state $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ จำนวน $n+1$ state ที่ทำให้

$$P[X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \ldots, X(t_n) = x_n]$$

$$= P[X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n]$$

นั่นก็คือพฤติกรรมของ process จะขึ้นอยู่กับ state ในปัจจุบัน แต่จะไม่ขึ้นกับ state ก่อนหน้านี้

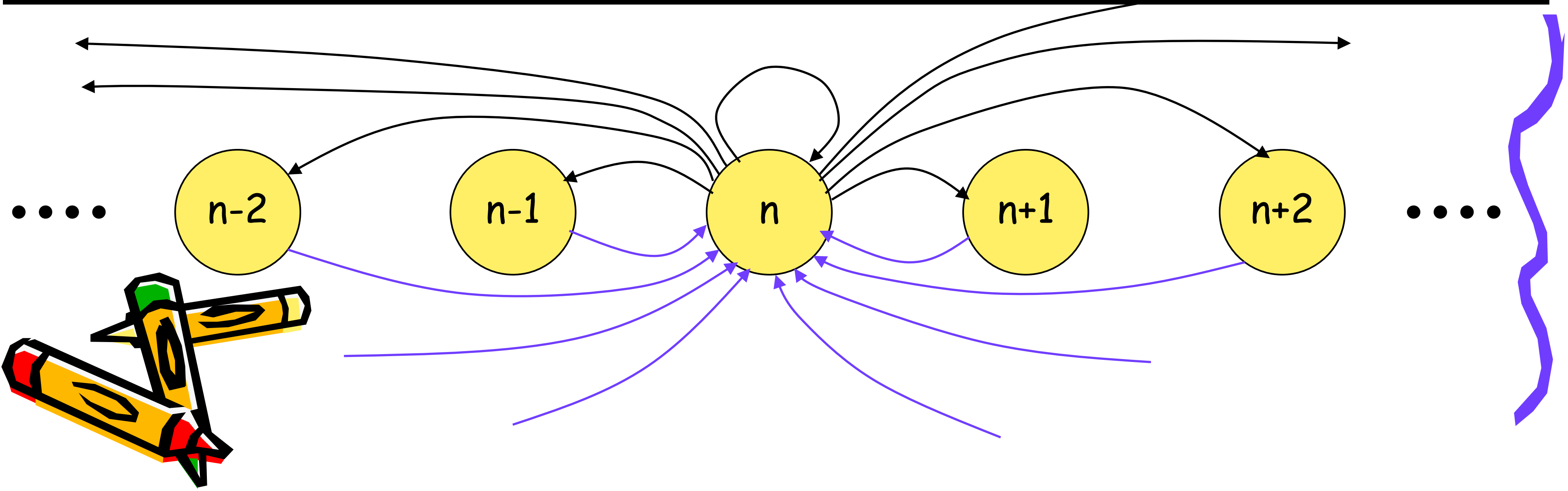


Markov Process and Markov Chain

Markov Process จะเรียกว่าเป็น **Markov Chain** ถ้า State Space นั้นเป็น Discrete ดังนั้นเราสามารถจำแนก Markov Process ได้ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 Classification ของ Markov Process

ชนิดของ Parameters	**State Space**	
	Discrete	**Continuous**
Discrete Time	**Discrete Time Markov Chain**	**Discrete Time Markov Process**
Continuous Time	**Continuous Time Markov Chain**	**Continuous Time Markov Process**



MarKov Chain

- สำหรับ MarKov Chain (Discrete State แต่ Time อาจจะเป็น Continuous หรือ Discrete)
  - ในขั้นนี้ เราจะเน้นที่ Discrete Time Markov Chain
  - สมมุติแกนเวลา ถูกแบ่งเป็น Time Slot ที่เท่ากัน และเราอยู่ที่ State i ใน Time Slot ปัจจุบัน ดังนั้น จะมีเหตุการณ์เกิดได้ดังนี้
    - ระบบอยู่ที่ State เดิม ใน Time Slot หน้า ด้วยค่า Probability P_{ii}
    - ระบบมีการเปลี่ยน State ไปยัง State อื่นๆ ด้วยค่า Probability $P_{ij}; j = 0,1,2,\dots,N, j \neq i$

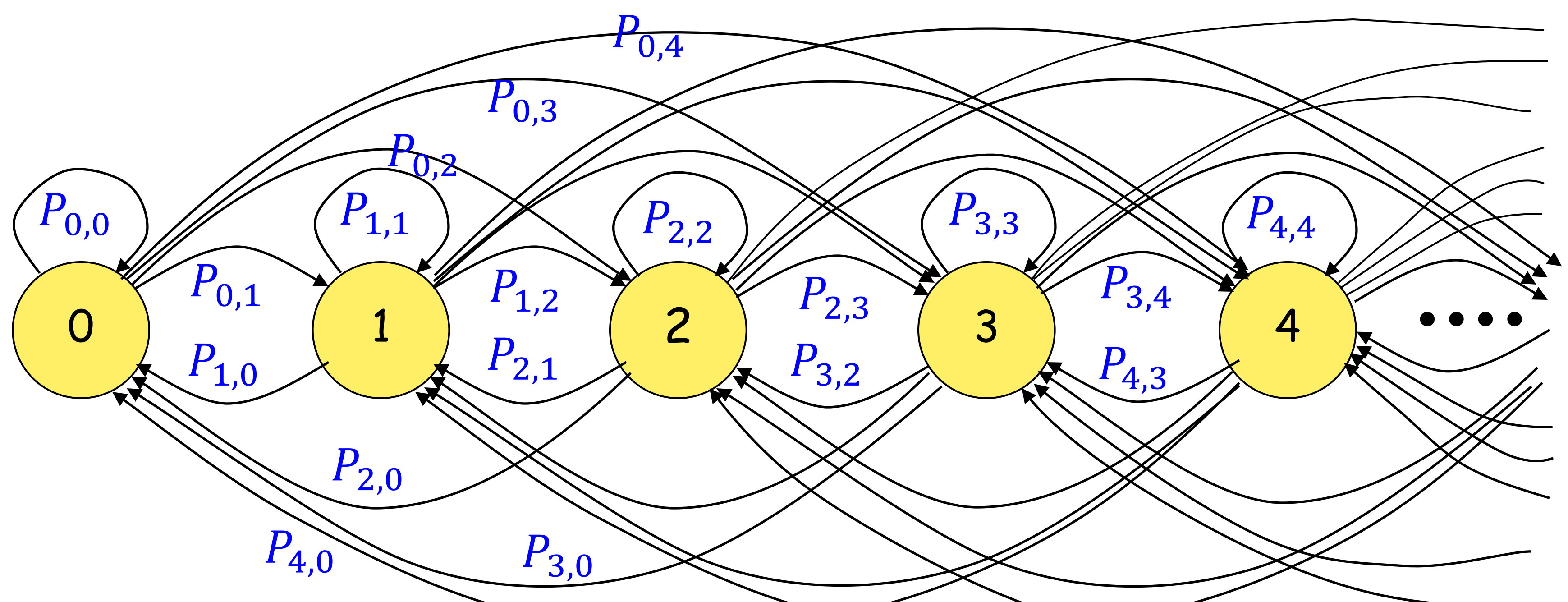
***Note: Continuous Time MarKov Chain** สามารถ **Model** จาก **Discrete Time MarKov Chain** โดยให้ **Limit** ระยะห่างของ **Time Slot** เข้าสู่ศูนย์*

Discrete Time Markov Chain

เราจะเริ่มจาก discrete-time stochastic process ของ $\{X_n \mid n = 0,1,2,\ldots\}$ ซึ่งเป็นเซ็ทของ Nonnegative Integer โดย ที่สถานะหรือ State ที่ Process นี้จะเป็นไปได้คือ $X_n = k \mid k = 0,1,2,\ldots$ โดยที่ k เป็น State ที่ X_n มีค่าอยู่ ซึ่ง Process นี้จะเรียกว่าเป็น **Markov Chain** ได้ก็ต่อเมื่อ **ถ้าที่ State** i **ใดใด มีค่า Probability ที่แน่นอน** P_{ij} **ซึ่งเป็นค่า Probability ที่มันจะเปลี่ยนจาก State** i **ไปเป็น State** j **เมื่อ Process เปลี่ยนจาก** X_n **ไปยัง** X_{n+1} **โดยไม่คำนึงถึงว่าก่อนที่จะมาถึงที่ State** i **นี้ มันได้ผ่าน State อะไรมาก่อน** นั่นก็คือในทางคณิตศาสตร์เรากล่าวได้ว่า สำหรับทุกๆค่าของ $n > 0, i_{n-1}, \ldots, i_0, i, j$ เราได้

$$
\begin{aligned}
P_{ij} &= P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\} \\
&= P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}
\end{aligned}
$$

ในรูปไม่ได้แสดง Transition หมดทุกเส้น



Discrete Time Markov Chain

เราเรียก P_{ij} ว่าเป็น **Transition Probability** ซึ่งจะต้องมีคุณสมบัติคือ

$$P_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

ซึ่งเราสามารถเขียนได้ในรูปของ Transition Probability Matrix ได้เป็น

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ . & . & . & \cdots \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \cdots \\ . & . & . & \cdots \end{bmatrix}$$

ถ้าระบบมีได้ถึง State N, (State 0,1,2,...,N), Transition Matrix จะมีขนาด (N+1)คูณ(N+1)

Discrete Time Markov Chain

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ . & . & . & \cdots \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \cdots \\ . & . & . & \cdots \end{bmatrix}$$

คราวนี้ลองมาพิจารณา n-step Transition Probability

$$P_{ij}^{n} = P\{X_{m+n} = j \mid X_m = i\}; \quad n \geq 0; i, j \geq 0$$

ค่า P_{ij}^{n} สามารถคำนวณได้จากสมการของ **Chapman-Kolmogorov** ดังนี้

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{n} P_{kj}^{m}; \quad n, m \geq 0; i, j \geq 0$$

Notations: [illegible] Discrete Time Markov Chain

- State Probability
  - คือ Probability ที่จะพบว่าระบบอยู่ที่ State ใดๆ
    $p_i = Probability\ State = i, i = 0,1,\ldots,N$
  - $\sum_{x=0}^{N} p_x = 1$
- Transition Probability
  - คือ Probability ที่ระบบจะกระโดดจาก State หนึ่งใน Time Slot ปัจจุบัน ไปยังอีก State หนึ่งใน Time Slot หน้า อย่าลืมว่าระบบไม่มีการจำ
  - $P_{ij} = P[X_n = i, X_{n+1} = j]; i,j = 0,1,\ldots,N$
  - $\sum_{j=0}^{N} P_{ij} = 1$
- ระบบอยู่ที่ Equilibrium ค่าเหล่านี้จะไม่เปลี่ยน

Discrete Time Markov Chain

สอง State i และ j จะเรียกว่ามีการ **Communicate** ถ้าสำหรับบางค่าของ n และ n' เราได้ $P_{ij}^{n} > 0$ และ $P_{ji}^{n'} > 0$ และถ้าทุกๆ state มีการ Communicate แล้ว เรากล่าวได้ว่า Markov Chain นั้น **Irreducible**

ถ้าแต่ละ state i ของ Markov Chain เราไม่สามารถหาค่า integer $d \geq 2$ ที่ทำให้ $P_{ii}^{n} = 0$ ยกเว้นเมื่อ n เป็นจำนวนเท่าของ d เรากล่าวได้ว่า Markov Chain นั้น เป็น **Aperiodic**

สุดท้าย ค่า probability distribution ของแต่ละ State $\{p_j \mid j \geq 0\}$ จะเรียกว่าเป็น **Stationary Distribution** สำหรับ Markov Chain ถ้า

$$p_j = \sum_{i=0}^{\infty} p_i P_{ij}, \quad j \geq 0 \qquad (1)$$

อย่างไรก็ตาม เราจะสนใจเฉพาะในกรณีของ irreducible และ aperiodic Markov Chain เท่านั้น เนื่องจากเป็นชนิดเดียวที่เราจะพบในความเป็นจริง(อย่างน้อยก็สำหรับวิชานี้) ซึ่งในกรณีนี้ ค่า state probability distribution จะได้

$$p_j = \lim_{n \to \infty} P_{jj}^{n}, \quad j \geq 0$$

Discrete Time Markov Chain

อย่างไรก็ตาม เราจะสนใจเฉพาะในกรณีของ irreducible และ aperiodic Markov Chain เท่านั้น เนื่องจากเป็นชนิดเดียวที่เราจะพบในความเป็นจริง(อย่างน้อยก็สำหรับวิชานี้) ซึ่งในกรณีนี้ ค่า state probability distribution จะได้

$$p_j = \lim_{n \to \infty} P_{jj}^n, \quad j \geq 0$$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าค่า limit ข้างบนสามารถหาค่าได้ และเมื่อ $p_j > 0$ เราจะได้ $1 / p_j$ เท่ากับค่า **mean recurrence time** ของ j (ค่า Expectation ของจำนวนของการ Transition ที่เกิดขึ้นในระหว่างที่มีการเข้าไปอยู่ที่ State j สองครั้งติดกัน) แต่ถ้า $p_j = 0$ ค่า mean recurrence time จะเป็นค่า infinity มองในอีกแง่หนึ่งก็คือค่า p_j สะท้อนถึงค่าเฉลี่ยของ propagation time ของ process ที่จะไปอยู่ที่ state j ดังนั้นใจความสำคัญสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

Discrete Time Markov Chain

Theorem. ใน Markov Chain ที่เป็น irreducible และ aperiodic จะมีสิ่งที่เป็นไปได้สองแบบ

1. $p_j = 0$ สำหรับทุกๆค่าของ $j \geq 0$ ซึ่ง chain จะไม่มี Stationary Distribution
2. $p_j > 0$ สำหรับทุกๆค่าของ $j \geq 0$ ซึ่งค่า $\{p_j \mid j \geq 0\}$ เป็นค่า Stationary Distribution เฉพาะของ chain นั้น (unique stationary distribution)

ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดสำหรับกรณีแรกข้างบนก็คือ $M/M/1$ queuing system เมื่อค่า Arrival rate λ มีค่าสูงกว่า service rate μ

ในกรณีที่สอง ซึ่งจะมีเรื่องของการแสดงคุณลักษณะ(Characteristic) ของ Stationary Distribution $\{p_j \mid j \geq 0\}$ เข้ามาเกี่ยวข้อง สำหรับในกรณีของ Queuing System เรามักจะใช้เทคนิคดังนี้

Discrete Time Markov Chain

จากสมการ $P_{jj} + \sum_{i=0, i \neq j}^{\infty} P_{ji} = 1$ เราคูณด้วย p_j ทั้งสองข้าง และใช้สมการข้างบน(สมการ 1) แทนค่า เราได้

$$\boxed{p_j \sum_{i=0, i \neq j}^{\infty} P_{ji} = \sum_{i=0, i \neq j}^{\infty} p_i P_{ij}} \qquad (2)$$

สมการเหล่านี้รู้จักกันในนามของ **Global Balance Equation** ซึ่งกล่าวว่า ที่ Equilibrium ค่า Probability ของการ Transition ออกจาก j (ด้านซ้ายของสมการที่ 2) เท่ากับ Probability ของการ Transition เข้าสู่ j (ด้านขวาของสมการที่ 2)

สมการ Global Balance Equation สามารถจะถูก Generalized โดยนำมาใช้กับทุกๆ State ใน Set ลองพิจารณาจาก Subset ของ State S โดยการรวมสมการที่(2) ตลอดทุกๆ $j \in S$ เราจะได้

$$\sum_{j \in S} p_j \sum_{i \notin S} P_{ji} = \sum_{i \notin S} p_i \sum_{j \in S} P_{ij} \qquad (3)$$

สมการข้างบนแสดงให้เห็นว่า probability ของการ transition ออกจาก set ของ state S เท่ากับ probability ของการ transition เข้าสู่ state S

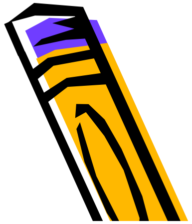
Discrete Time Markov Chain

เหตุที่เป็นเช่นนั้นก็เนื่องมาจากว่า เมื่อ Markov Chain เป็น irreducible สถานะของมันจะกลับเข้ามายัง state S (ด้วย probability เท่ากับหนึ่ง) นับครั้งไม่ถ้วน ดังนั้นแต่ละครั้งที่มีการ transition ออกมาจาก state S มันจะต้องมี(ด้วย probability เท่ากับหนึ่ง) การ transition กลับมาใน state S ในเวลาต่อมา ผลลัพธ์ก็คือ อัตราส่วนของการ transition ออกจาก S เทียบกับการ transition ทั้งหมด จะเท่ากับอัตราส่วนของการ transition เข้าสู่ S อันนี้คือความหมายที่แท้จริงของ global balance equation ในสมการที่ 3

สรุป MarKov Chain

- สถานะของระบบ ดูได้จากจำนวณ Event ที่อยู่ในระบบ เรียก State ของระบบ
  - ถ้า State เป็น Discrete เราได้ MarKov Chain
- มีค่า Probability สองชุดที่อธิบายการทำงานของระบบ
  - State Probability: Probability ที่ระบบจะอยู่ที่ State ใด State หนึ่ง
    - ผลรวมของ State Probability จะต้องเท่ากับ 1
  - Transition Probability: Probability ที่ระบบจะมีการเปลี่ยน State
    - อธิบายจาก Transition Matrix
    - ผลรวมของ Transition Probability แต่ละแถว จะต้องเท่ากับ 1
- ถ้าระบบอยู่ที่ Equilibrium ค่า Probability ของ State จะไม่เปลี่ยน และสามารถอธิบายได้ด้วย Global Balance Equation
- MarKov Chain ที่เราสนใจคือ Irreducible และ Aperiodic

Detailed Balance Equation: Simple MarKov Chain

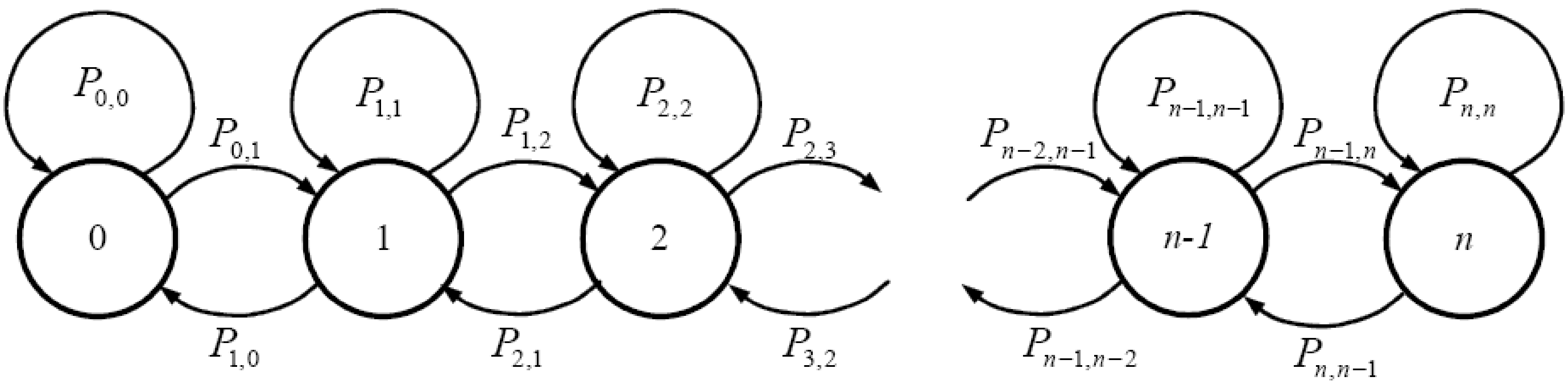


เพื่อให้เข้าใจถึงการนำ global balance equation ไปประยุกต์ใช้ ขอให้เราพิจารณาจาก Markov Chain ที่พบทั่วไปใน Queuing System กล่าวคือ **Birth-Death System** โดยที่สอง state ที่อยู่ติดกันจะเป็น state ที่ต่างกันเพียงหนึ่งหมายเลข ดังแสดงในรูปที่ 1 เราจะสมมุติว่า $P_{i,i+1} > 0$ และ $P_{i+1,i} > 0$ สำหรับทุกๆค่าของ i ซึ่งอันนี้จะเป็น Condition ที่จำเป็นและเพียงพอ (necessary and sufficient condition) สำหรับ Chain ที่จะเป็น irreducible คราวนี้มาพิจารณาจาก set ของ state

$$S = \{0,1,2,\ldots, n\}$$

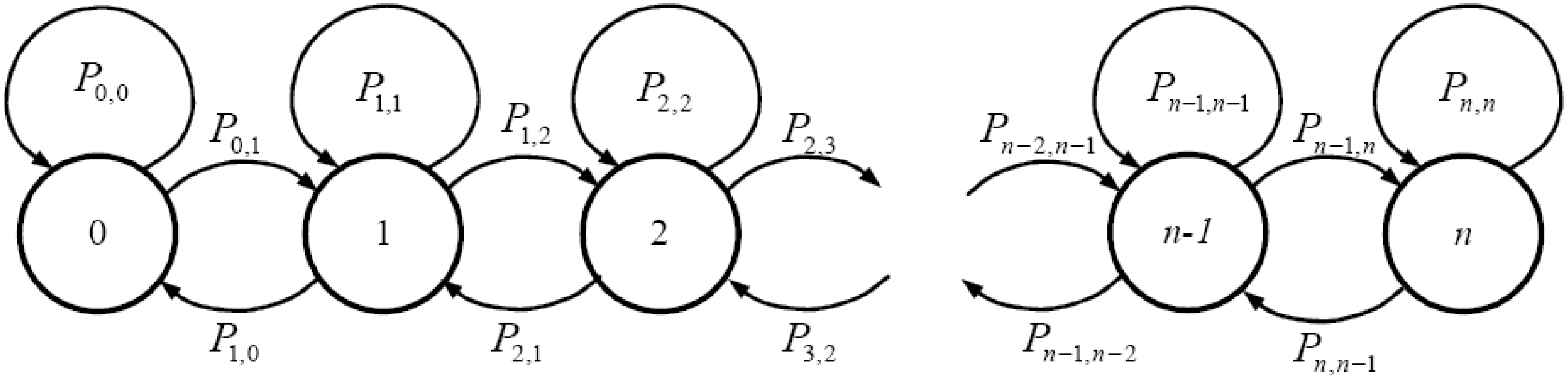
โดยใช้สมการที่ 3, เราได้

ระบบจะอยู่ที่ State เดิม หรือกระโดดไปยัง State ข้างเคียงเท่านั้น



รูปที่ 1 Transition Probability Diagram ของ Birth-Death Process

Markov Chain(Detailed Bal Eq)



รูปที่ 1 Transition Probability Diagram ของ Birth-Death Process

$$p_n P_{n,n+1} = p_{n+1} P_{n+1,n}, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{4}$$

กล่าวคือ ในสถานะ steady-state ค่า probability ของการ transition จาก n ไปเป็น $n+1$ จะเท่ากับ ค่า probability ของการ transition จาก $n+1$ ไปเป็น n สมการนี้มีประโยชน์ในการคำนวณค่า stationary distribution $\{p_j \mid j \geq 0\}$

สมการที่ 4 นี้ เป็นกรณีพิเศษของสมการ

$$p_j P_{ji} = p_i P_{ij}, \quad i,j \geq 0 \tag{5}$$

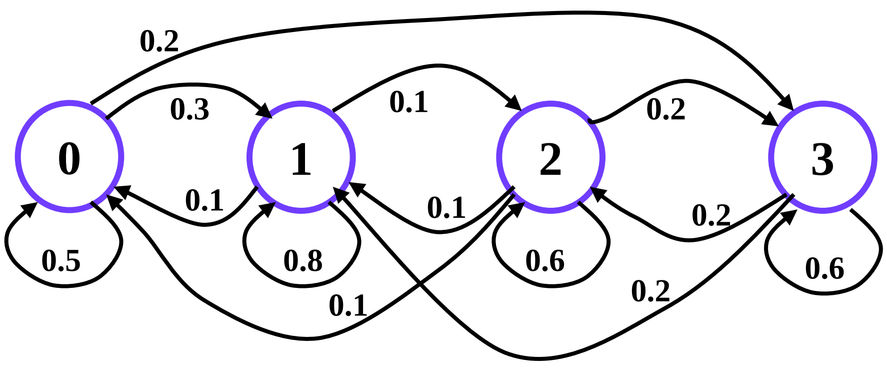
ซึ่งเรียกว่า **Detailed Balance Equation** สมการนี้ไม่จำเป็นต้องเป็นจริงเสมอไปสำหรับทุกๆ Markov Chain อย่างไรก็ตาม ในกรณีพิเศษหลายๆกรณีที่สำคัญมันจะเป็นจริง และถ้าเป็นเช่นนั้นแล้ว ก็จะช่วยให้การคำนวณค่า state stationary distribution ง่ายขึ้นมาก

- Transition Matrix ของ Simple Markov Chain จะมีลักษณะเป็น Tridiagonal

$$
\mathbf{P} = \begin{bmatrix}
P_{00} & P_{01} & & & 0 \\
P_{10} & P_{11} & P_{12} & & \\
 & P_{21} & P_{22} & P_{23} & \\
 & & & \ddots & P_{n-1,n} \\
0 & & & P_{n,n-1} & P_{nn}
\end{bmatrix}
$$

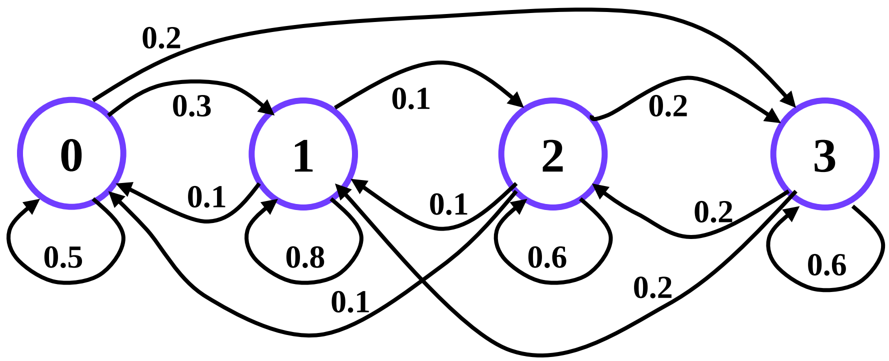
Example

- MarKov Chain แสดงด้วย Markov Model ดังรูปข้างล่าง
  - 1. จงหา Transition Matrix
  - 2. จาก Transition Matrix จงคำนวณหา State Probability



Example

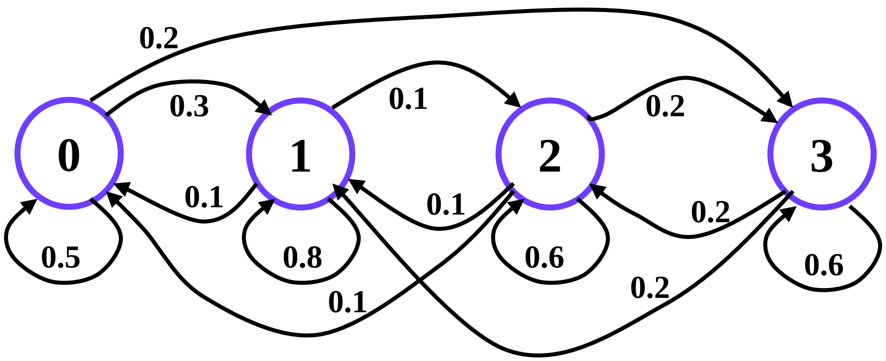
– 1. จงหา Transition Matrix



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$$

Example

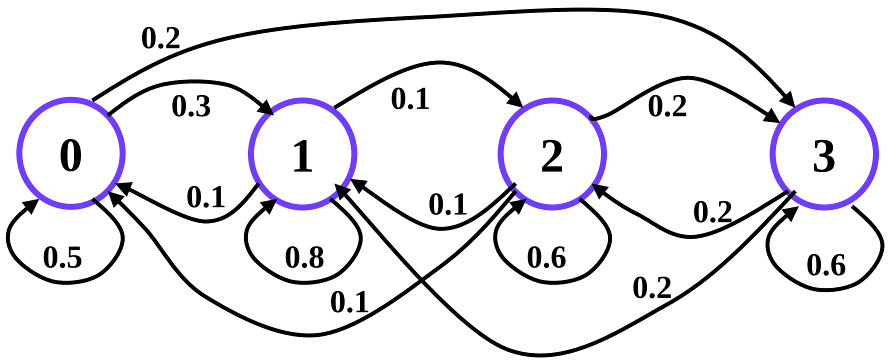
– 1. จงหา Transition Matrix



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Example

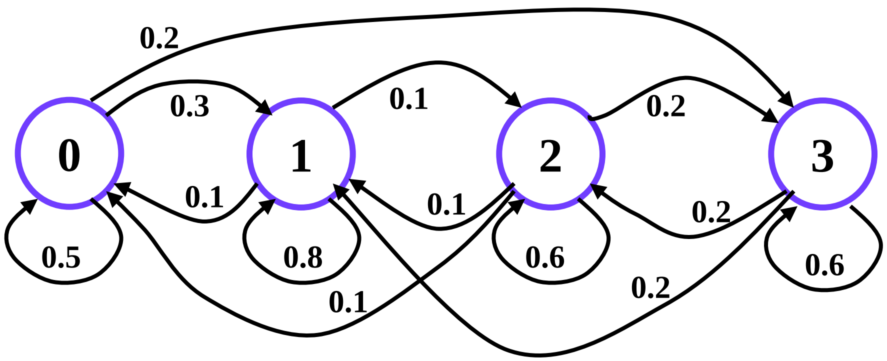
– 2. จงคำนวณหา State Probability



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Example

– 2. จงคำนวณหา State Probability



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

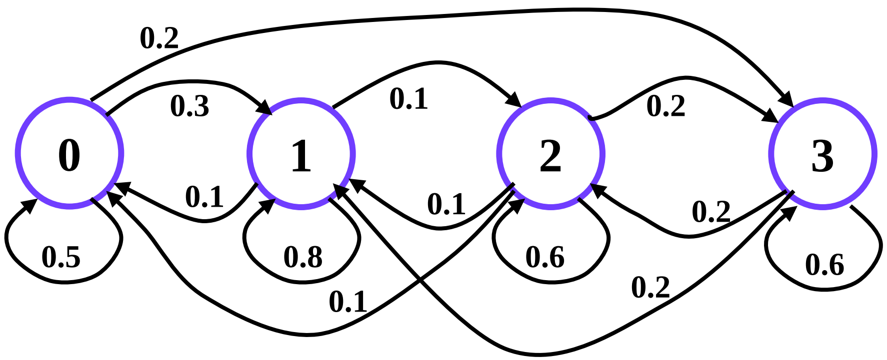
$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1.0$$

Global Balanced Equation :

$$p_j \sum_{i=0, i\neq j}^{\infty} P_{ji} = \sum_{i=0, i\neq j}^{\infty} p_i P_{ij}$$

Example

– 2. จงคำนวณหา State Probability



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1.0$$

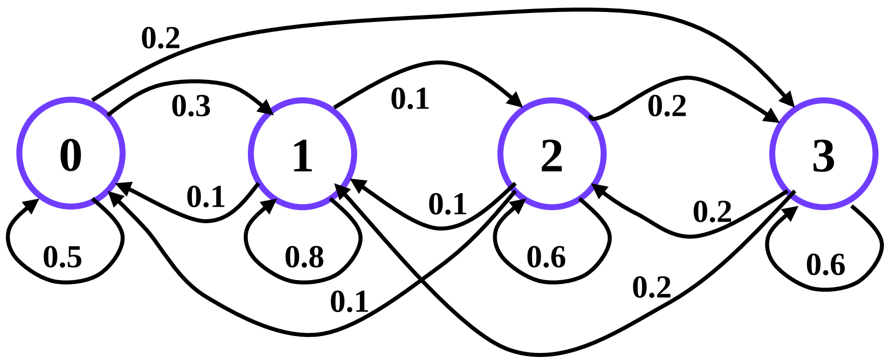
Global Balanced Equation :

$$p_j \sum_{i=0, i\neq j}^{\infty} P_{ji} = \sum_{i=0, i\neq j}^{\infty} p_i P_{ij}$$

$$p_0[P_{01} + P_{02} + P_{03}] = p_1 P_{10} + p_2 P_{20} + p_3 P_{30}$$

Example

– 2. จงคำนวณหา State Probability



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1.0$$

Global Balanced Equation :

$$p_j \sum_{i=0, i\neq j}^{\infty} P_{ji} = \sum_{i=0, i\neq j}^{\infty} p_i P_{ij}$$

$$p_0[P_{01} + P_{02} + P_{03}] = p_1 P_{10} + p_2 P_{20} + p_3 P_{30}$$

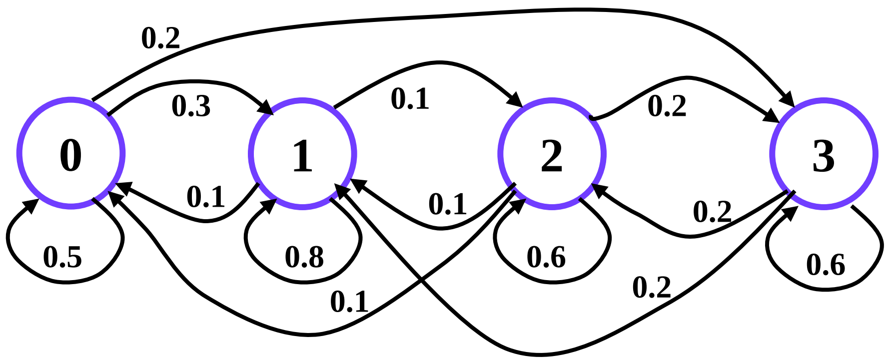
$$p_1[P_{10} + P_{12} + P_{13}] = p_0 P_{01} + p_2 P_{21} + p_3 P_{31}$$

$$p_2[P_{20} + P_{21} + P_{23}] = p_0 P_{02} + p_1 P_{12} + p_3 P_{32}$$

$$p_3[P_{30} + P_{31} + P_{32}] = p_0 P_{03} + p_1 P_{13} + p_2 P_{23}$$

Example

– 2. จงคำนวณหา State Probability



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1.0$$

Global Balanced Equation :

$$p_j \sum_{i=0, i \neq j}^{\infty} P_{ji} = \sum_{i=0, i \neq j}^{\infty} p_i P_{ij}$$

$$p_0[0.3+0+0.2] = 0.1p_1 + 0.1p_2 + 0.p_3$$

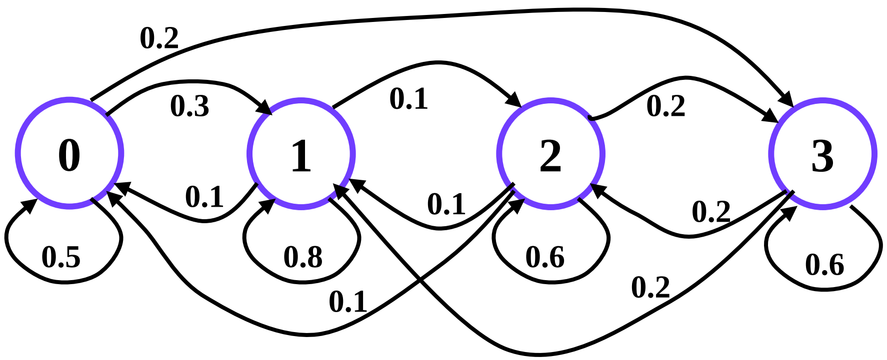
$$p_1[0.1+0.1+0] = 0.3p_0 + 0.1p_2 + 0.2p_3$$

$$p_2[0.1+0.1+0.2] = 0.p_0 + 0.1p_1 + 0.2p_3$$

$$p_3[0+0.2+0.2] = 0.2p_0 + 0.p_1 + 0.2p_2$$

Example

– 2. จงคำนวณหา State Probability



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1.0$$

Global Balanced Equation :

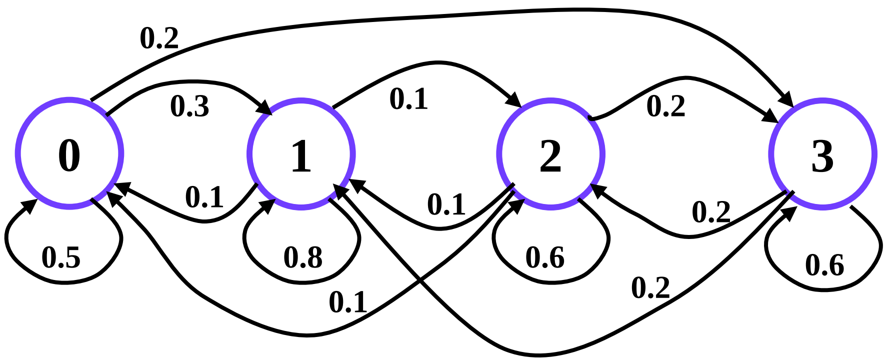
$$p_j \sum_{i=0, i\neq j}^{\infty} P_{ji} = \sum_{i=0, i\neq j}^{\infty} p_i P_{ij}$$

$$\begin{aligned}
-0.5p_0 + 0.1p_1 + 0.1p_2 \qquad\qquad &= 0 \\
0.3p_0 - 0.2p_1 + 0.1p_2 + 0.2p_3 &= 0 \\
0.1p_1 - 0.4p_2 + 0.2p_3 &= 0 \\
0.2p_0 \qquad\quad + 0.2p_2 - 0.4p_3 &= 0
\end{aligned}$$

Homogeneous Linear Eq. *ยังแก้สมการไม่ได้*

Example

– 2. จงคำนวณหา State Probability



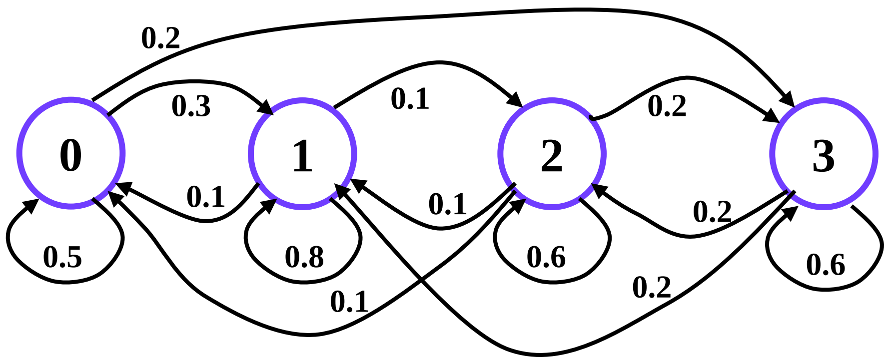
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -0.5p_0 + 0.1p_1 + 0.1p_2 \qquad\qquad &= 0 \\ 0.3p_0 - 0.2p_1 + 0.1p_2 + 0.2p_3 &= 0 \\ 0.1p_1 - 0.4p_2 + 0.2p_3 &= 0 \\ p_0 \quad + p_1 \quad + p_2 \quad + p_3 &= 1.0 \end{aligned}$$

ต้องนำสมการที่ 4 มาใส่เสมอ + อีก 3 สมการอะไรก็ได้
สมการ Non Homogeneous System of Linear Equation
แก้ได้โดยวิธี Elimination จะได้ Unique Solution

Example

– 2. จงคำนวณหา State Probability



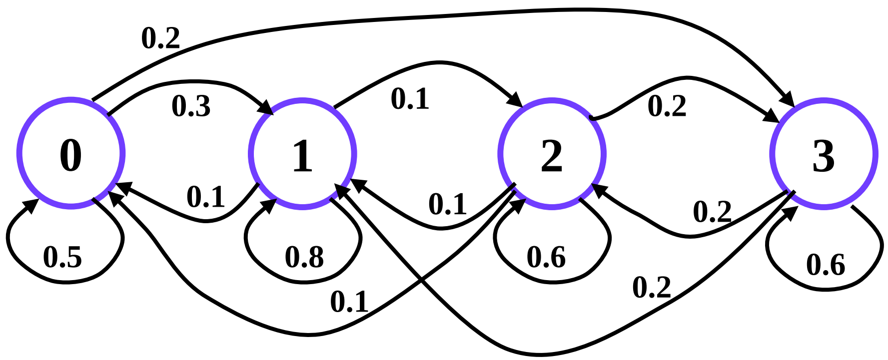
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -0.5p_0 + 0.1p_1 + 0.1p_2 \qquad\qquad &= 0 \\ 0.3p_0 - 0.2p_1 + 0.1p_2 + 0.2p_3 &= 0 \\ 0.1p_1 - 0.4p_2 + 0.2p_3 &= 0 \\ p_0 \quad + p_1 \quad + p_2 \quad + p_3 &= 1.0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & -0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & -0.4 & 0.2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Non Homogeneous System of Linear Equation
แก้ได้โดยวิธี Elimination จะได้ Unique Solution
Algorithm ในการแก้สมการ จะกล่าวภายหลัง

Example

– 2. จงคำนวณหา State Probability



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -0.5p_0 + 0.1p_1 + 0.1p_2 \quad\quad &= 0 \quad (1) \\ 0.3p_0 - 0.2p_1 + 0.1p_2 + 0.2p_3 &= 0 \quad (2) \\ 0.1p_1 - 0.4p_2 + 0.2p_3 &= 0 \quad (3) \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 &= 1.0 \quad (4) \end{aligned}$$

$$(4) - 5\times(2): \quad -0.5p_0 + 2p_1 + 0.5p_2 = 1 \quad (5)$$

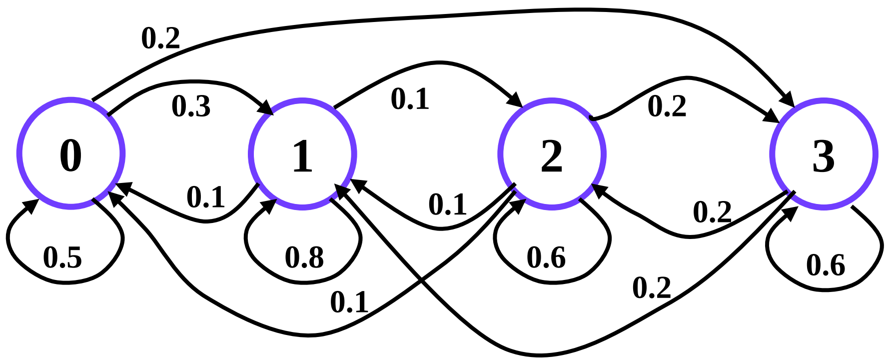
$$(4) - 5\times(3): \quad p_0 + 0.5p_1 + 3p_2 = 1 \quad (6)$$

จากสมการที่ (1),(5),(6) เราได้

$$\begin{aligned} -0.5p_0 + 0.1p_1 + 0.1p_2 &= 0 \quad (1) \\ -0.5p_0 + 2p_1 + 0.5p_2 &= 1 \quad (5) \\ p_0 + 0.5p_1 + 3p_2 &= 1 \quad (6) \end{aligned}$$

Example

– 2. จงคำนวณหา State Probability



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$-0.5p_0 + 0.1p_1 + 0.1p_2 = 0 \quad (1)$$

$$-0.5p_0 + 2p_1 + 0.5p_2 = 1 \quad (5)$$

$$p_0 + 0.5p_1 + 3p_2 = 1 \quad (6)$$

$$(6) + 2\times(1): \quad 0.7p_1 + 3.2p_2 = 1 \quad (7)$$

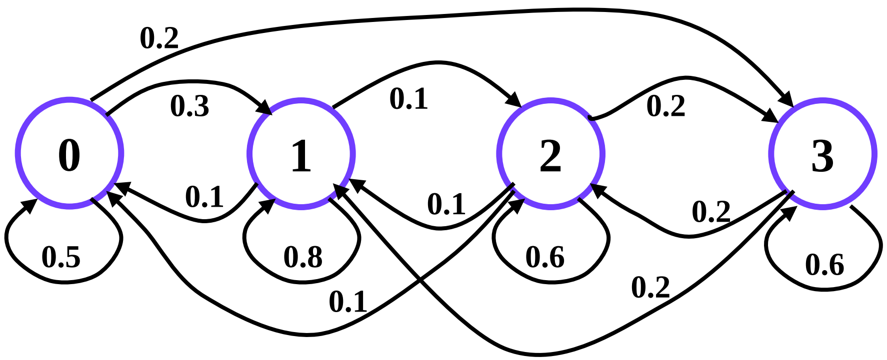
$$(6) + 2\times(5): \quad 4.5p_1 + 4p_2 = 3 \quad (8)$$

$$(8) - \frac{4.5}{0.7}(7): \quad (4 - \frac{4.5}{0.7}3.2)p_2 = 3 - \frac{4.5}{0.7}$$

$$p_2 = \frac{-3.4285714}{-16.57142857} = 0.2069$$

Example

– 2. จงคำนวณหา State Probability



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = 0.2069$$

$$\text{From}\,(7): p_1 = \frac{1 - 3.2p_2}{0.7} = 0.4828$$

$$From\,(1): p_0 = 0.1379$$

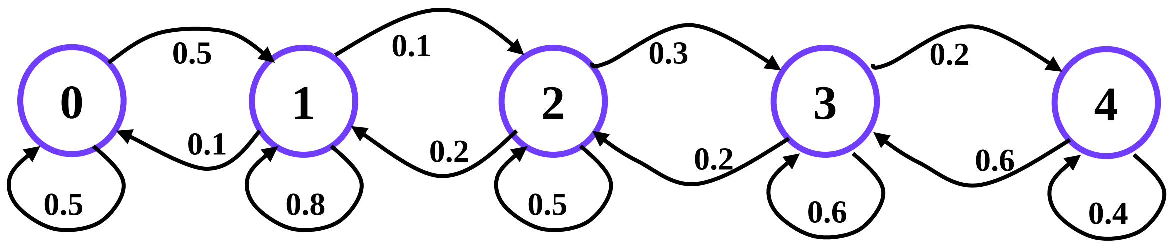
$$From\,(4): p_3 = 0.1724$$

สมการ System of Linear Equation แก้ได้โดยวิธี Elimination

$$p_0 = 0.1379,\ p_1 = 0.4828,\ p_2 = 0.2069,\ p_3 = 0.1724$$

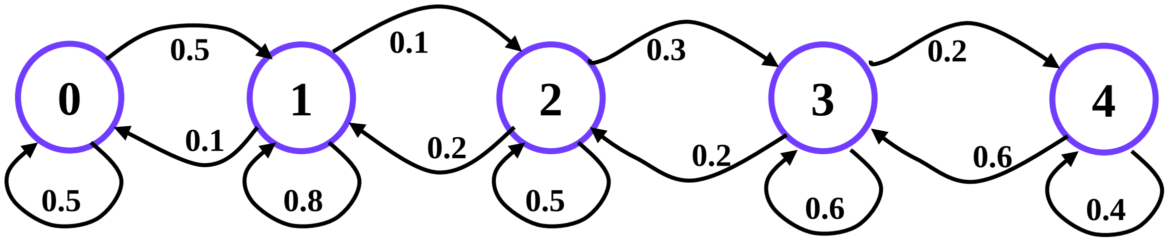
Example: Simple MarKov

- MarKov Chain แสดงด้วย Markov Model ดังรูปข้างล่าง
  - 1. จงหา Transition Matrix
  - 2. จาก Transition Matrix จงคำนวณหา State Probability



Example: Simple MarKov

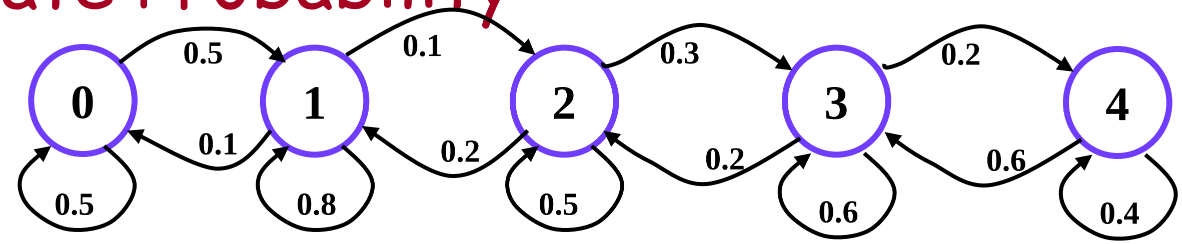
- Transition Matrix



$$\mathbf{P} == \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3} & P_{0,4} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} & P_{1,4} \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} & P_{2,4} \\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} & P_{3,4} \\ P_{4,0} & P_{4,1} & P_{4,2} & P_{4,3} & P_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Example: Simple MarKov

- State Probability



$$\mathbf{P} == \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3} & P_{0,4} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} & P_{1,4} \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} & P_{2,4} \\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} & P_{3,4} \\ P_{4,0} & P_{4,1} & P_{4,2} & P_{4,3} & P_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Detailed Balance Equation} : p_i P_{i,j} = p_j P_{j,i}$$

$$\begin{array}{ll} p_0 P_{0,1} = p_1 P_{1,0} & 0.5p_0 = 0.1p_1 \text{ or } p_1 = 5p_0 \\ p_1 P_{1,2} = p_2 P_{2,1} & 0.1p_1 = 0.2p_2 \text{ or } p_2 = 0.5p_1 = 2.5p_0 \\ p_2 P_{2,3} = p_3 P_{3,2} \quad \Rightarrow & 0.3p_2 = 0.2p_3 \text{ or } p_3 = 1.5p_2 = 3.75p_0 \\ p_3 P_{3,4} = p_4 P_{4,3} & 0.2p_3 = 0.6p_4 \text{ or } p_4 = \frac{1}{3}p_3 = 1.25p_0 \end{array}$$

Example: Simple MarKov

- State Probability

Detailed Balance Equation : $p_i P_{i,j} = p_j P_{j,i}$

$$
\begin{array}{l}
p_0 P_{0,1} = p_1 P_{1,0} \\
p_1 P_{1,2} = p_2 P_{2,1} \\
p_2 P_{2,3} = p_3 P_{3,2} \\
p_3 P_{3,4} = p_4 P_{4,3}
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c}
0.5 p_0 = 0.1 p_1 \text{ or } p_1 = 5 p_0 \\
0.1 p_1 = 0.2 p_2 \text{ or } p_2 = 0.5 p_1 = 2.5 p_0 \\
0.3 p_2 = 0.2 p_3 \text{ or } p_3 = 1.5 p_2 = 3.75 p_0 \\
0.2 p_3 = 0.6 p_4 \text{ or } p_4 = \tfrac{1}{3} p_3 = 1.25 p_0
\end{array}
$$

$$\textit{From} \quad p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

$$p_0 + 5p_0 + 2.5p_0 + 3.75p_0 + 1.25p_0 = 1$$

$$p_0[1 + 5 + 2.5 + 3.75 + 1.25] = 1$$

$$p_0 = 0.074074 \quad \textit{then}$$

$$p_1 = 0.37037,\ p_2 = 0.185185,\ p_3 = 0.277778,\ p_4 = 0.092593$$

Example: Simple MarKov

- State Probability

Detailed Balance Equation : $p_i P_{i,j} = p_j P_{j,i}$

$$
\begin{aligned}
p_0 P_{0,1} &= p_1 P_{1,0} & & 0.5p_0 = 0.1p_1 \text{ or } p_1 = 5p_0 \\
p_1 P_{1,2} &= p_2 P_{2,1} & \Rightarrow \quad & 0.1p_1 = 0.2p_2 \text{ or } p_2 = 0.5p_1 = 2.5p_0 \\
p_2 P_{2,3} &= p_3 P_{3,2} & & 0.3p_2 = 0.2p_3 \text{ or } p_3 = 1.5p_2 = 3.75p_0 \\
p_3 P_{3,4} &= p_4 P_{4,3} & & 0.2p_3 = 0.6p_4 \text{ or } p_4 = \tfrac{1}{3}p_3 = 1.25p_0
\end{aligned}
$$

From $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ **ใช้วิธีของ Matrix**

$$
\begin{aligned}
0.5p_0 - 0.1p_1 &= 0 \\
0.1p_1 - 0.2p_2 &= 0 \\
0.3p_2 - 0.2p_3 &= 0 \\
0.2p_3 - 0.6p_4 &= 0 \\
p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= 1
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{bmatrix}
0.5 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.1 & -0.2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.3 & -0.2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.2 & -0.6 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

End of Chapter 5

- Chapter 6
  - Introduction to Queuing Theory
- Homework Chapter 5 Download
  - เน้นที่ Correlation ของ Stationary RP และการใช้ Global/Detailed Balance Equation ใน MarKov Chain

CPE 332
Computer Engineering Mathematics II

Week 6

Part II, Chapter 6

Queuing System

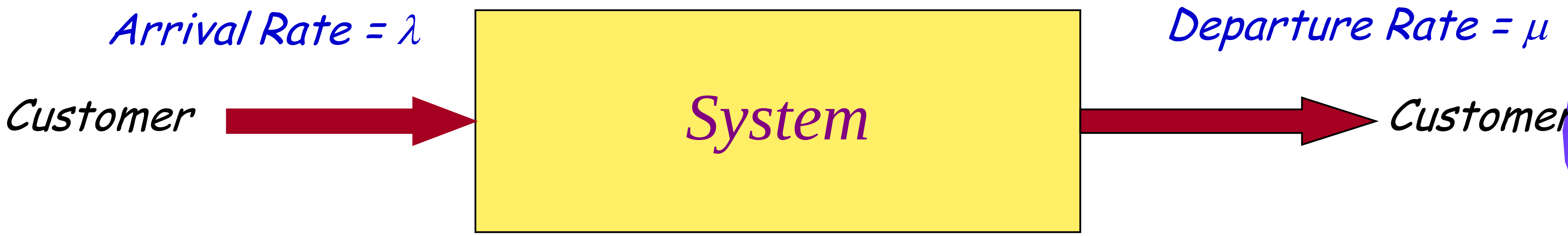
Topics

- Birth and Death Process
- Unlimited Server
- N Servers
- Single Server, M/M/1
- Kendal Notation
- Applications

System

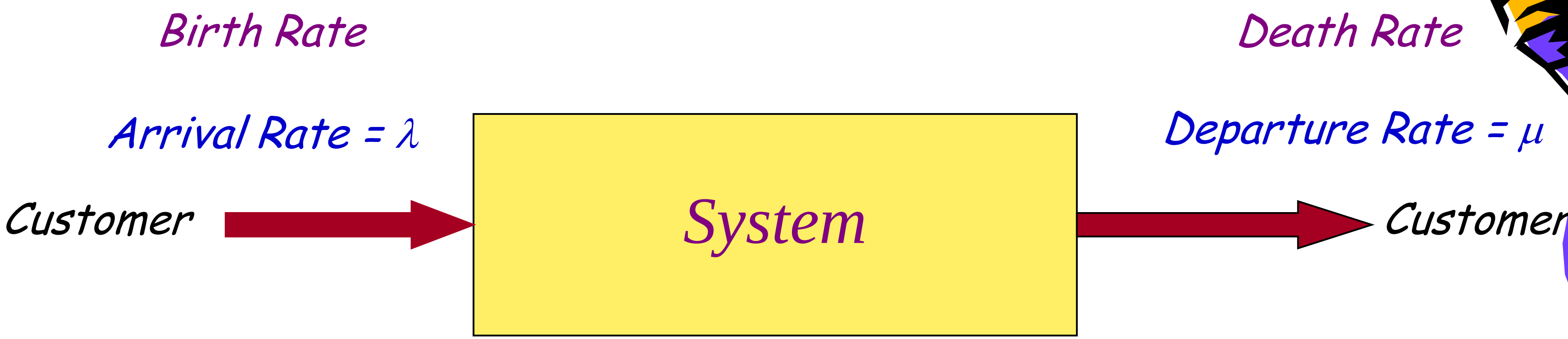
- ระบบประกอบด้วย Input และ Output
- พิจารณาระบบที่มีการให้บริการ(Service) แก่ลูกค้า (Customer)
  - ลูกค้าเข้ามาในระบบเพื่อขอรับบริการ (Input)
  - ระบบมี Resource ที่จำกัดในการให้บริการ
  - ลูกค้า เมื่อได้รับบริการแล้ว ออกไปจากระบบ (Output)
- ระบบขายของหน้าร้าน, ระบบหน้าธนาคาร, ระบบการจราจร, ระบบ Operating System ในคอมพิวเตอร์, สถานีน้ำมัน/แก๊ส, คิวจ่ายของ/อาหาร, ระบบสื่อสารข้อมูล, ระบบโทรศัพท์ และอื่นๆอีกมาก

Queuing System



1.อัตราการเข้ามาของลูกค้า คือ Arrival Rate
2.อัตราการออกไปของลูกค้าเมื่อได้รับบริการเสร็จคือ Departure Rate
3. State *ของระบบคือจำนวนลูกค้าที่อยู่ในระบบ ที่รอบริการหรือกำลังถูกบริการ*
4. ถ้าระบบไม่มีการจดจำ การบริการลูกค้าแต่ละรายเหมือนกัน และไม่ขึ้นกับอดีต เราสามารถใช้รูปแบบ MarKov Chain *อธิบายระบบ*

Queuing System



5. ถ้าเราแบ่งช่วงเวลาการเข้ามาของลูกค้าเป็นช่วง Time Slot
และบันทึกเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในแต่ละ Time Slot
a) มีลูกค้าใหม่เข้ามา เพื่อขอใช้บริการ (State ของระบบจะเพิ่ม)
หรือ b) มีลูกค้าที่ได้รับบริการแล้วออกจากระบบไป (State จะลด)
หรือ c) ไม่มีลูกค้าใหม่ และไม่มีลูกค้าที่ให้บริการเสร็จ (State คงเดิม)

6. จาก Model ข้อ 5 เราจะได้ Discrete Time Markov Chain

7. ถ้าช่วงเวลาของ Time Slot สั้นมากจนกระทั่งลูกค้าที่เข้ามา หรือออกไป
ในช่วงหนึ่ง Time Slot สามารถมีได้แค่คนเดียว
เราจะสามารถ Model ระบบได้เป็น Simple MarKov Model

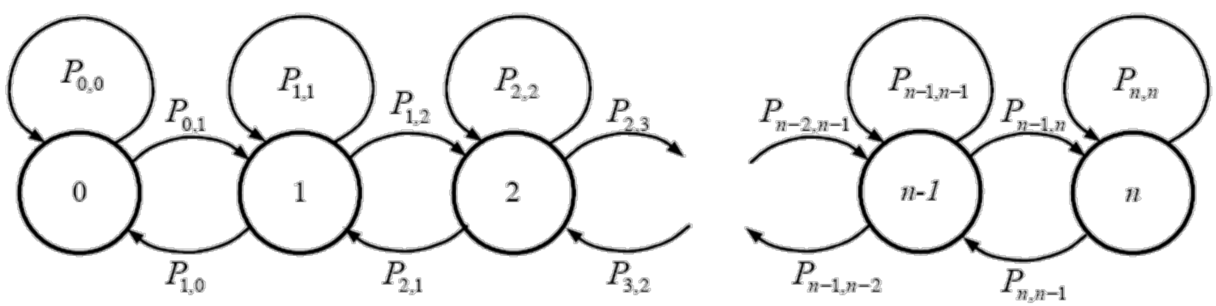
Queuing System

ถ้า $\lambda < \mu$ ระบบจะสามารถ
เข้าสู่ Equilibrium ได้

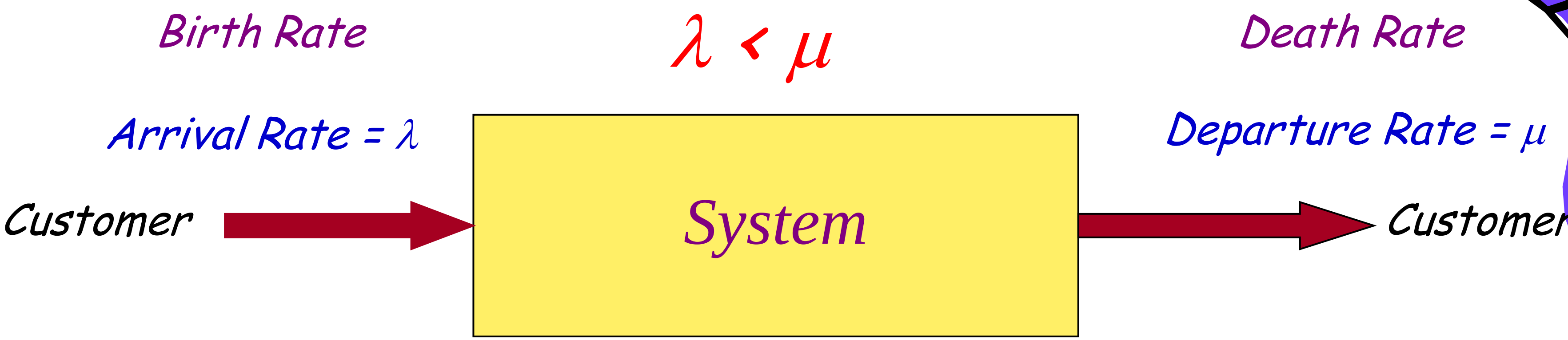
Birth Rate $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$; Server Utilization Death Rate

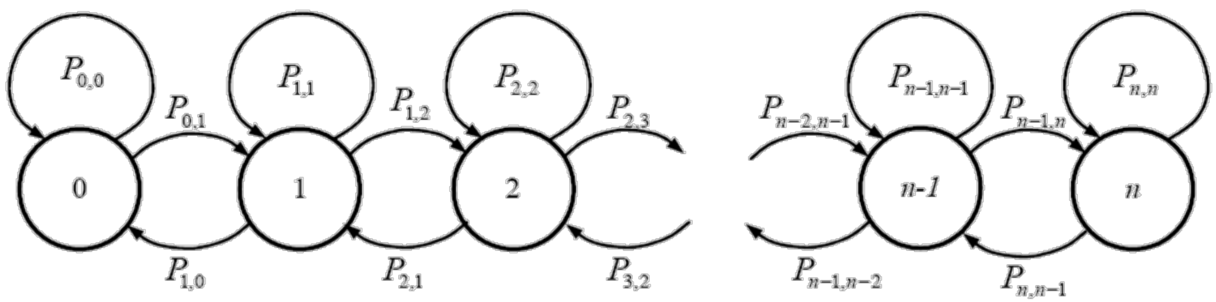
Arrival Rate = λ Departure Rate = μ

Customer → System → Customer



Queuing System
Simple MarKov Model





Detailed Balance Equation: $p_i P_{ij} = p_j P_{ji}$

สำหรับสอง State i, j ที่อยู่ติดกันใดๆ

Queuing System
Simple MarKov Model

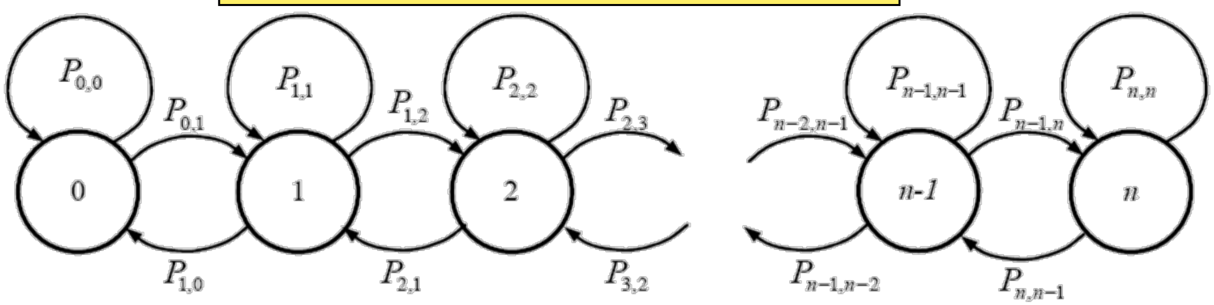
$p_i P_{ij} = p_j P_{ji}$

$\lambda < \mu$

Birth Rate | *Death Rate*

Arrival Rate = λ | *Departure Rate = μ*

Customer → **System** → *Customer*



ในที่นี้เราจะพิจารณากรณี

1. *ที่ลูกค้าแต่ละรายเข้ามาในระบบแบบ Random และเป็น Poisson Process*
2. *เวลาในการให้บริการของลูกค้าแต่ละราย เป็น Random มีการกระจายแบบ Exponential*

Queuing System
Simple MarKov Model

$$p_i P_{ij} = p_j P_{ji}$$

Birth Rate

$$\lambda < \mu$$

Death Rate

Arrival Rate = λ

Departure Rate = μ

Customer → System → Customer

Arrival: 1. Probability ที่จะมีลูกค้า k คนเข้ามาในช่วง T วินาที

$$P[k] = P[X = k] = \frac{(\lambda T)^k e^{\lambda T}}{k!}; k = 0, 1, 2, \ldots$$

เมื่อ λ เป็นค่าเฉลี่ยจำนวนลูกค้าที่เข้ามา ต่อวินาที

2. ค่า Inter-arrival Time, τ จะมีการกระจายแบบ Exponential ด้วยค่าเฉลี่ย $^1/_\lambda$

$$P[T \leq \tau] = 1 - \lambda e^{-\lambda\tau}$$

Queuing System
Simple MarKov Model

$$p_i P_{ij} = p_j P_{ji}$$

$$\lambda < \mu$$

Birth Rate

Death Rate

Arrival Rate = λ

Departure Rate = μ

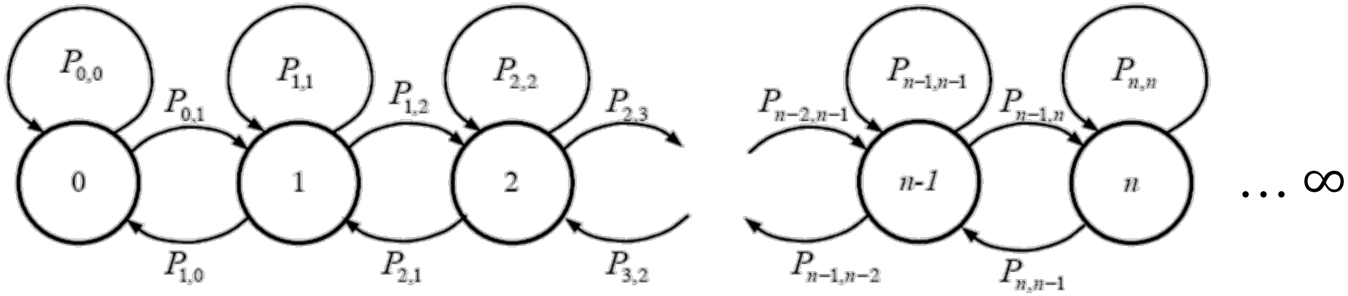
Customer → System → Customer

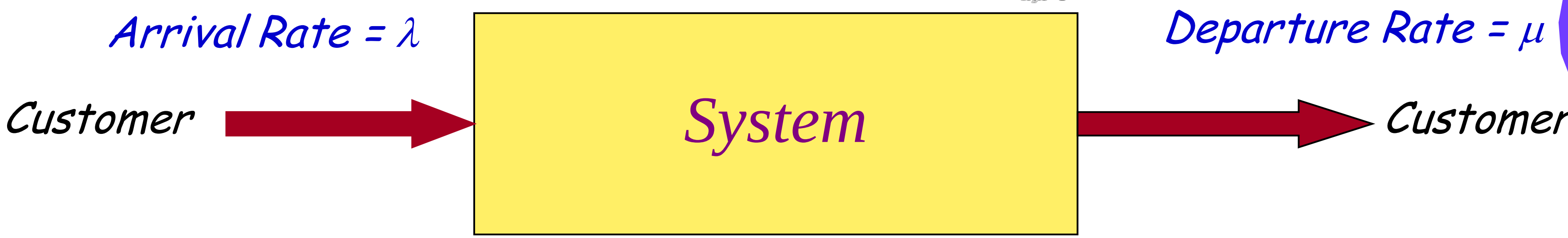
Departure: 1. เวลาเฉลี่ยที่ลูกค้าใช้บริการ = T_s(Service Time)
จะมีการกระจายแบบ Exponential
Probability ที่ลูกค้าจะใช้เวลาบริการ น้อยกว่าหรือเท่ากับ t $P[T \leq t] = 1 - \frac{1}{T_s} e^{-t/T_s}$

2. Departure Rate คืออัตราที่ลูกค้าออกจากระบบ
เมื่อได้รับบริการเสร็จ(อัตราการให้บริการแก่ลูกค้า)

$$\mu = \frac{1}{T_s}$$

Queuing System Case 1: Unlimited Server; No Queue





1. ลูกค้าที่เข้ามา เป็น Random ด้วยอัตราเฉลี่ย λ และมีการกระจายแบบ Poisson
2. สมมุติว่า Customer แต่ละคนที่เข้ามาได้รับการ Service จากระบบทันที (ระบบมี Server จำนวนไม่จำกัด และรับ Customer ได้ไม่จำกัด)
3. เวลาที่ใช้ในการ Service เป็น เป็น Exponential ด้วยเวลาเฉลี่ย T_S
4. ระบบสามารถรับ Customer ได้ไม่จำกัด
5. ลูกค้าเข้ามาได้ทีละคน และออกทีละคน
6. ระบบนี้เรียก M/M/∞

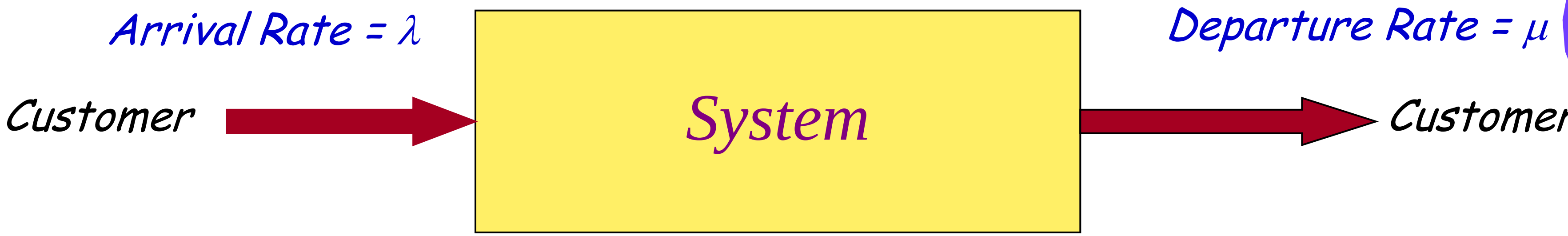
Queuing System Case 1:
Unlimited Server; No Queue

$\lambda < \mu$

$$P[k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

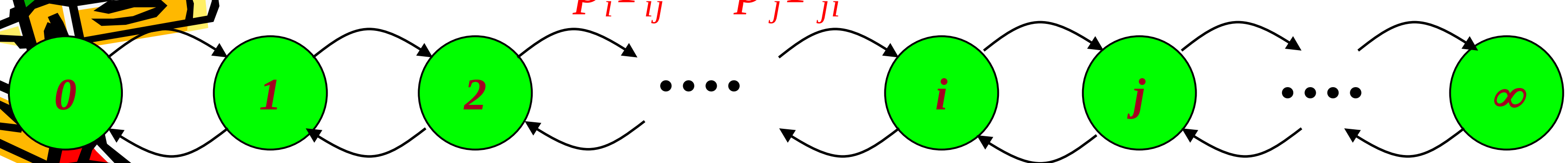
$$p_x = \frac{\rho^x e^{-\rho}}{x!};\ \rho = \lambda / \mu$$

$$P[T \geq t] = e^{-t/T_s};\ T_s = 1/\mu$$



1. สมมุติว่า Customer แต่ละคนที่เข้ามาเป็น Poisson และได้รับการ Service จากระบบทันที
2. เวลาที่ใช้ในการ Service เป็น Random สมมุติว่าเป็น Exponential ด้วยเวลาเฉลี่ย T
3. ระบบสามารถรับ Customer ได้ไม่จำกัด แต่เข้ามาได้ทีละคน และออกทีละคน
4. ระบบนี้เรียก M/M/∞ แสดงได้ด้วย Simple Markov Model
5. เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าค่า State Probability จะมีการกระจายแบบ Poisson

$$p_i P_{ij} = p_j P_{ji}$$



Queuing System Case 2: Lost System
Limited Server=N; No Queue

$$\lambda < \mu$$

$$P[k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$p_x = \frac{\rho^x / x!}{\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!}}$$

$$P[T \geq t] = e^{-t/T_s}; T_s = {}^{1}\!/_{\mu}$$

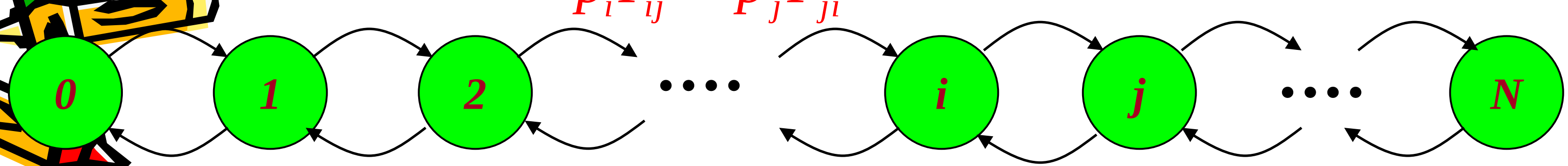
Arrival Rate = λ

Departure Rate = μ

Customer → *System, N Server* → *Customer*

1. *สมมุติว่า Customer แต่ละคนที่เข้ามาเป็น Poisson และได้รับการ Service จากระบบทันที*
2. *เวลาที่ใช้ในการ Service เป็น Random สมมุติว่าเป็น Exponential ด้วยเวลาเฉลี่ย T*
3. *ระบบสามารถรับ Customer ได้ N ถ้าทุก Server เต็ม จะรับ Customer ใหม่ไม่ได้ (Lost)*
4. *ระบบนี้เรียก M/M/N/N แสดงได้ด้วย N-state Simple Markov Model*
5. *State Probability จะมีการกระจายแบบ First Erlang (Erlang B) Distribution*

$$p_i P_{ij} = p_j P_{ji}$$



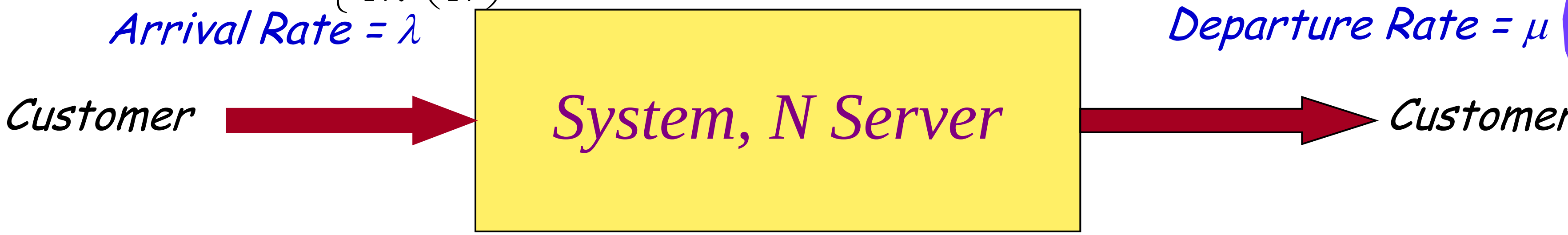
Queuing System Case 3: Delay System
Limited Server=N; With Unlimited Queue

$$\lambda < \mu$$

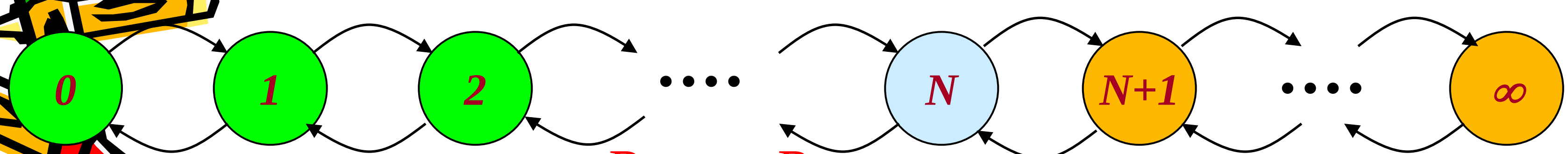
$$P[k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad p_x = \begin{cases} \dfrac{\rho^x}{x!} p_0; 0 \le x \le N \\ \dfrac{N^N}{N!}\left(\dfrac{\rho}{N}\right)^x p_0; x \ge N \end{cases}; \; p_0 = \left[\frac{N\rho^N}{N!(N-\rho)} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!}\right]^{-1} \qquad P[T \ge t] = e^{-t/T_s}; T_s = 1/\mu$$

Arrival Rate = λ

Departure Rate = μ



1. สมมุติว่า Customer แต่ละคนที่เข้ามาเป็น Poisson และได้รับการ Service จากระบบทันที
2. เวลาที่ใช้ในการ Service เป็น Random สมมุติว่าเป็น Exponential ด้วยเวลาเฉลี่ย T
3. ระบบสามารถรับ Customer ได้ไม่จำกัด แต่จะ Service ได้สูงสุด N พร้อมๆกัน
4. ถ้าทุก Server เต็ม Customer ใหม่จะต้องรอใน Queue ในกรณีนี้จะเกิด Queuing Delay
5. ระบบนี้เรียก M/M/N หรือ M/M/N/∞ แสดงได้ด้วย Simple Markov Model
6. State Probability จะมีการกระจายแบบ Second Erlang (Erlang C) Distribution



$$p_i P_{ij} = p_j P_{ji}$$

Queuing System Case 3: Delay System

Server=1; With Unlimited Queue; M/M/1

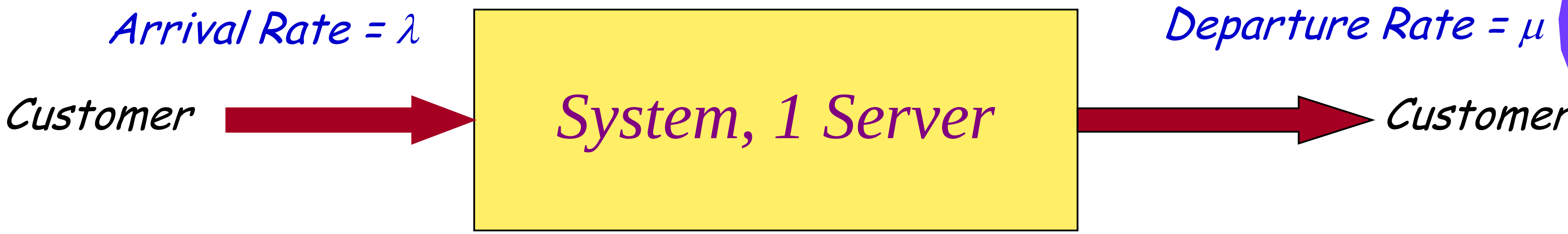
$$\lambda < \mu$$

$$p_0 = \left[\frac{\rho}{(1-\rho)} + 1\right]^{-1} = 1-\rho$$

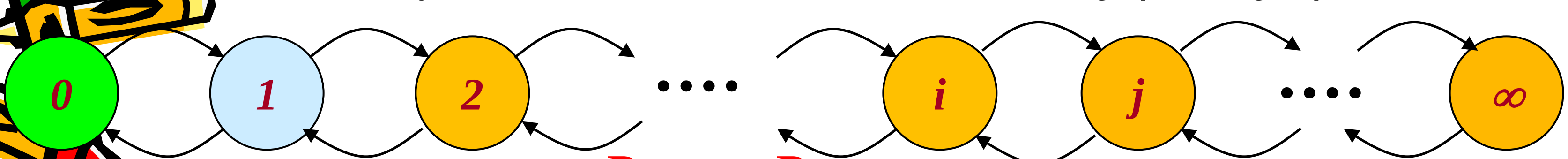
$$P[k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$p_x = \rho^x (1-\rho)$$

$$P[T \ge t] = e^{-t/T_s}; T_s = 1/\mu$$

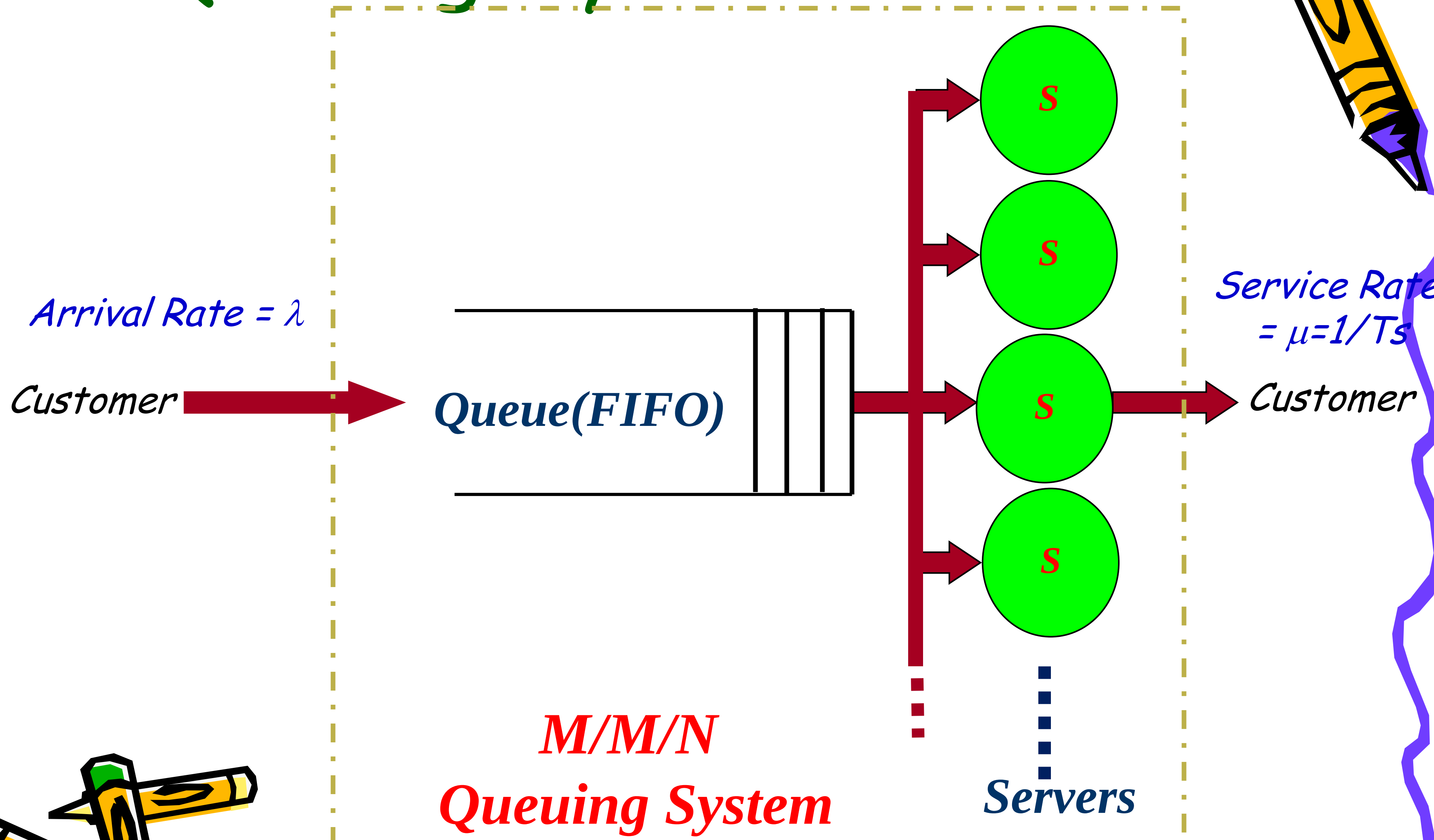


1. สมมุติว่า Customer แต่ละคนที่เข้ามาเป็น Poisson และได้รับการ Service จากระบบทันที
2. เวลาที่ใช้ในการ Service เป็น Random สมมุติว่าเป็น Exponential ด้วยเวลาเฉลี่ย T
3. ระบบสามารถรับ Customer ได้ไม่จำกัด แต่จะ Service ได้ครั้งละคน
4. ถ้าทุก Server เต็ม Customer ใหม่จะต้องรอใน Queue ในกรณีนี้จะเกิด Queuing Delay
5. ระบบนี้เรียก M/M/1 หรือ M/M/1/∞ แสดงได้ด้วย Simple Markov Model
6. State Probability จะมีการกระจายแบบ Second Erlang (Erlang C) Distribution

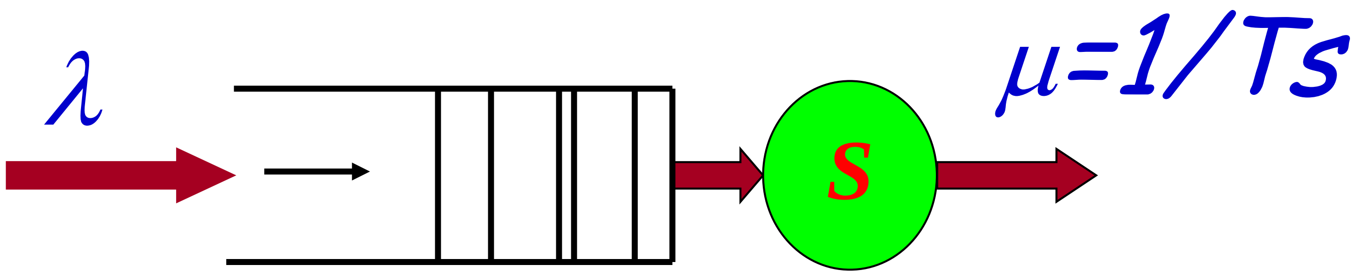


$$p_i P_{ij} = p_j P_{ji}$$

Queuing System: Model

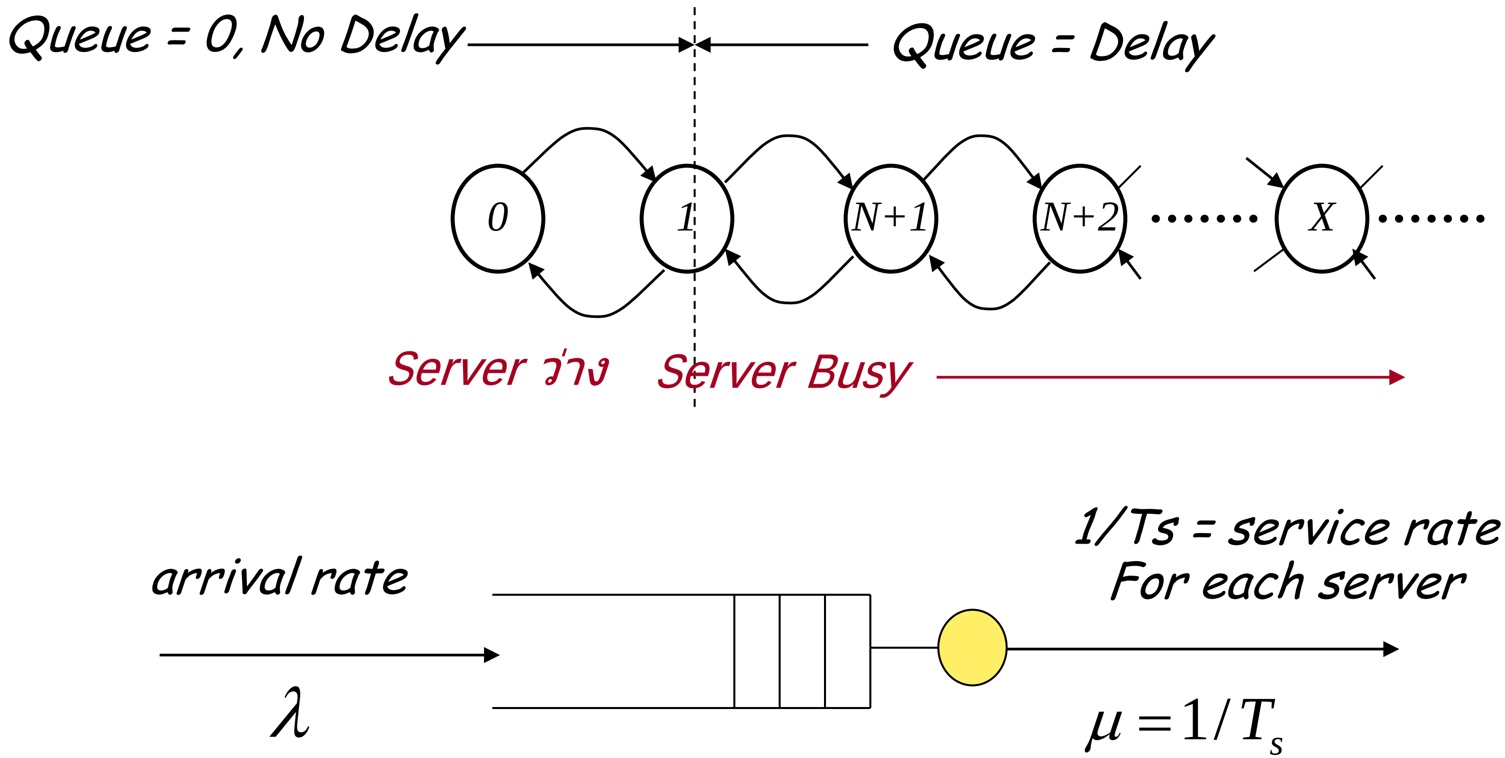


M/M/1: Summary

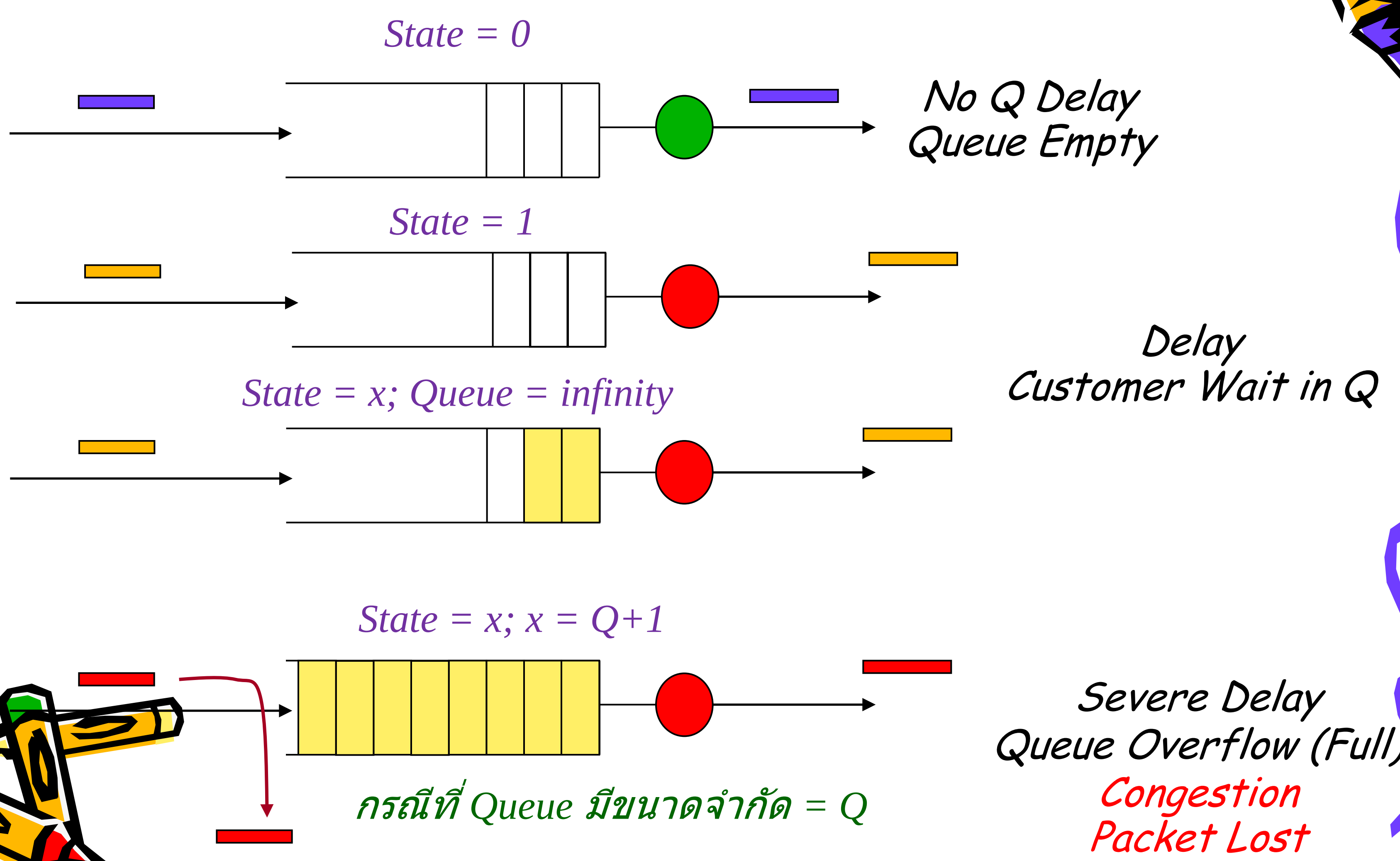


Arrival = Poisson, λ
Inter Arrival Time = Exponential, $1/\lambda$
Service Rate, μ
Service Time, Ts ($1/\mu$) = Exponential
Queue = FIFO
1 Server

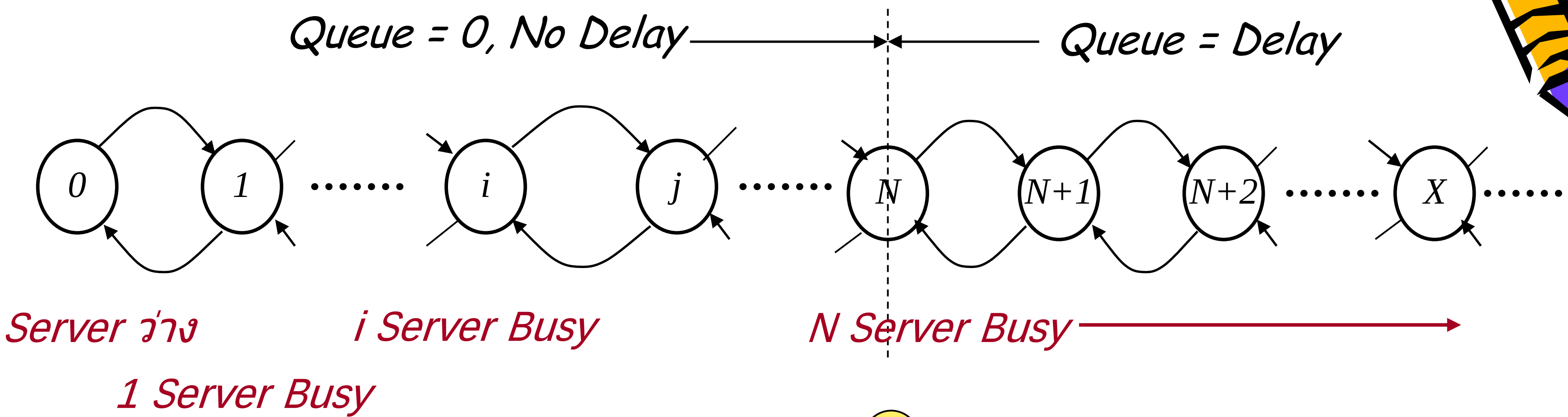
Queuing Model(1 Server); M/M/1

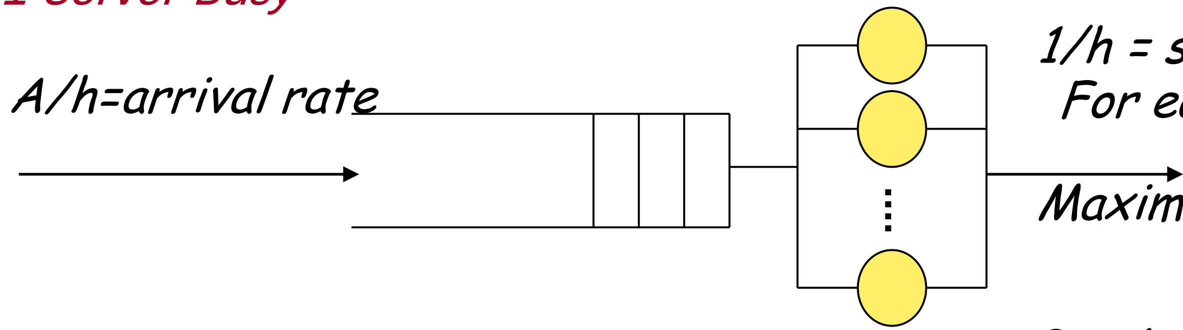


การทำงานของ M/M/1



เปรียบเทียบ Queuing Model (N Server); M/M/N



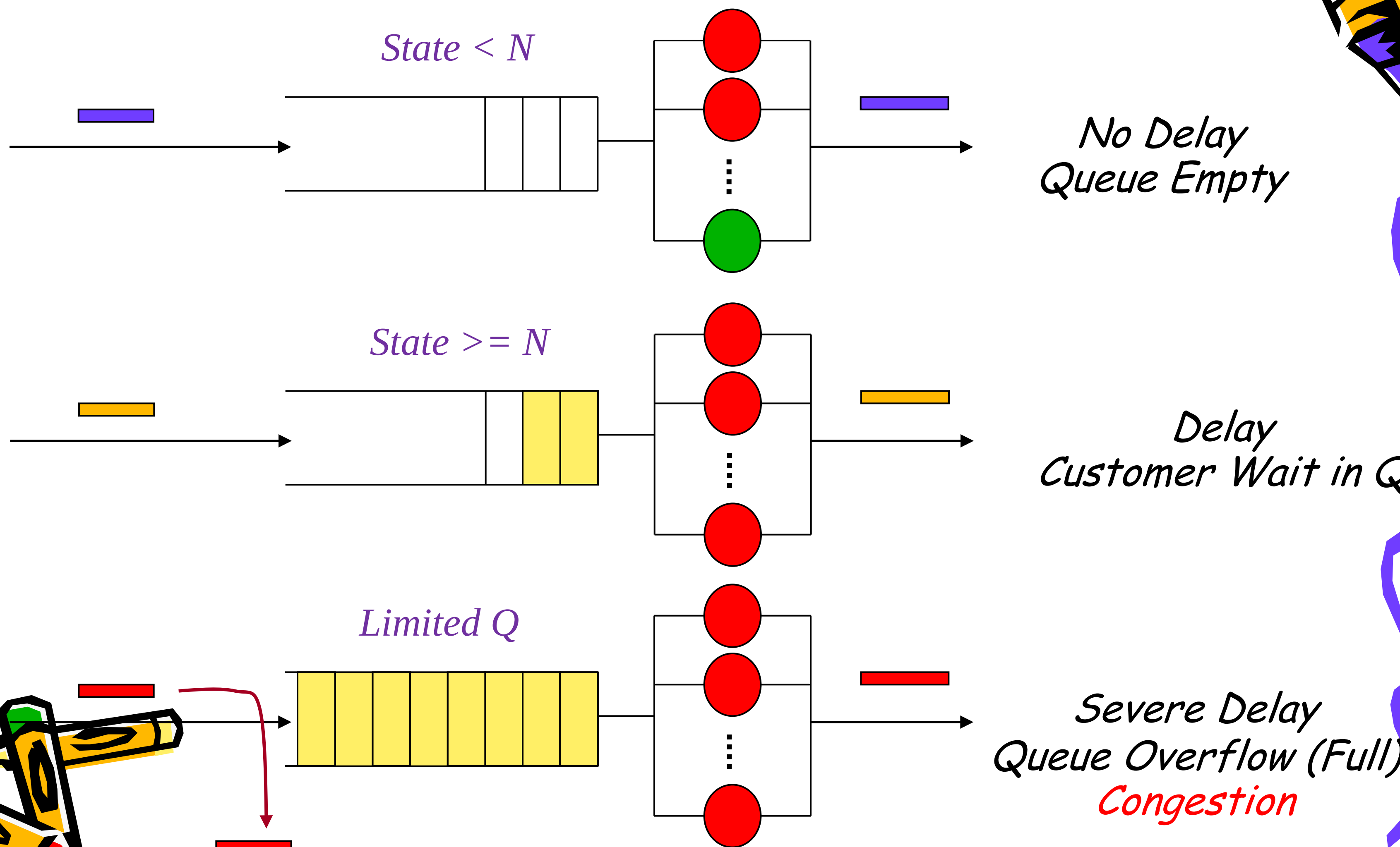


1/h = service rate For each server

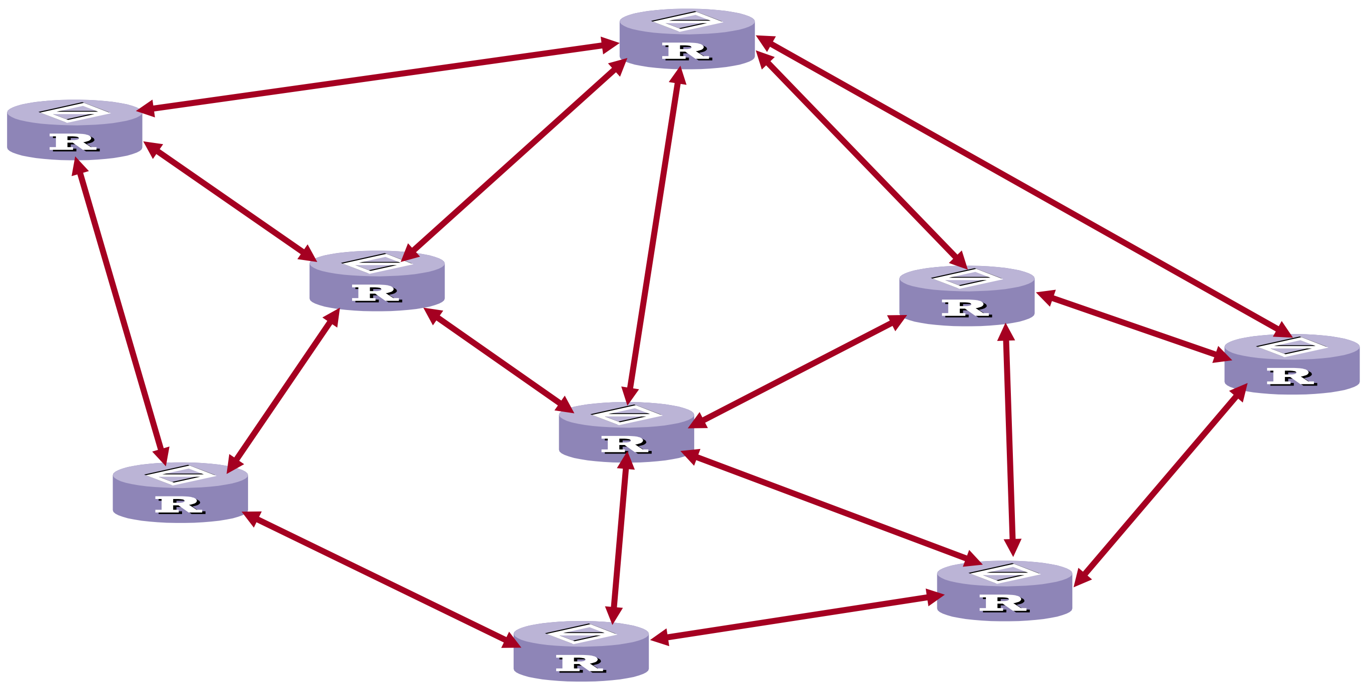
Maximum Service Rate = N/h

Service Rate at State k = k/h

M/M/N

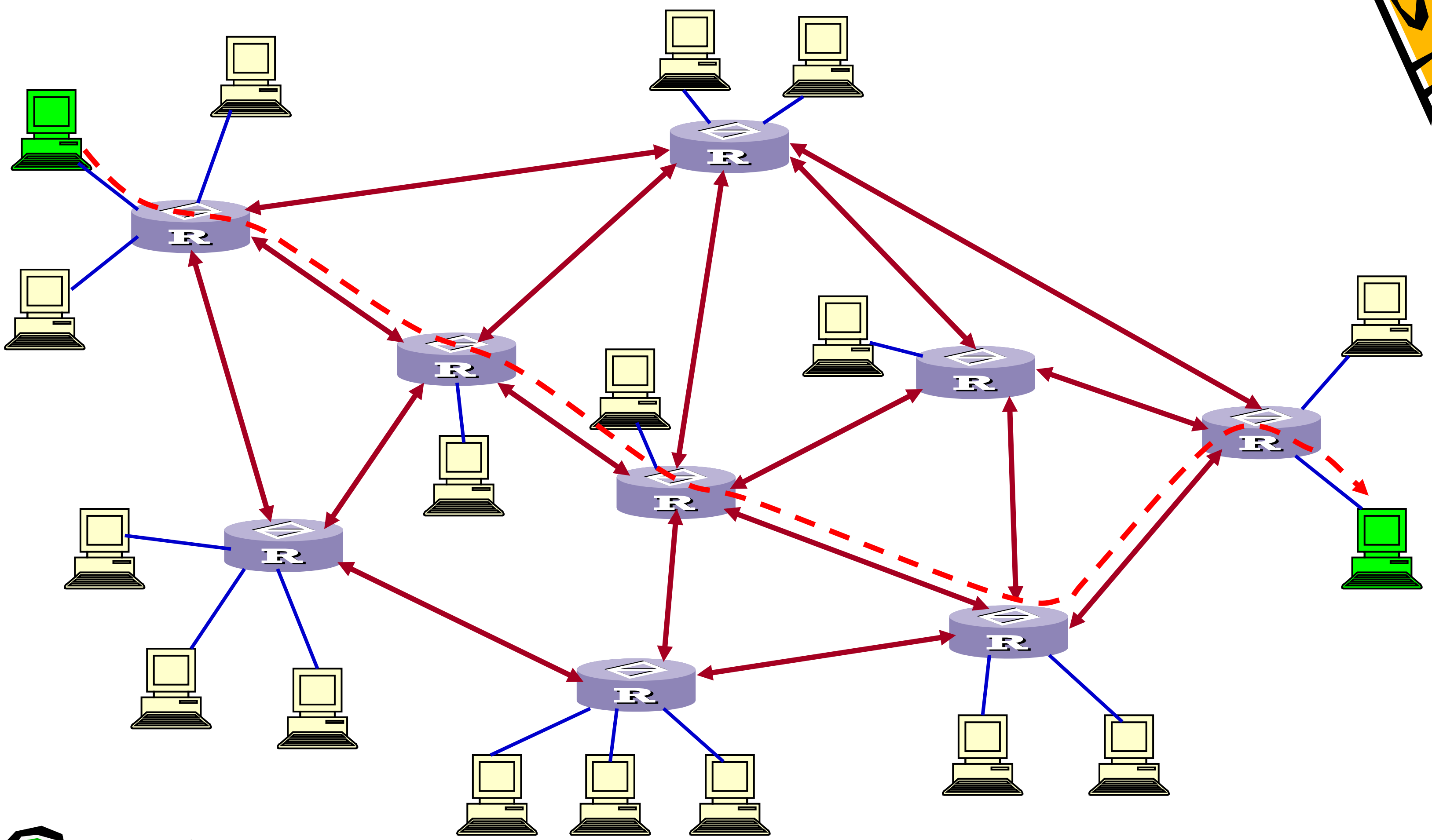

State < N
No Delay
Queue Empty
State >= N
Delay
Customer Wait in Q
Limited Q
Severe Delay
Queue Overflow (Full)
Congestion

Network Model using M/M/1



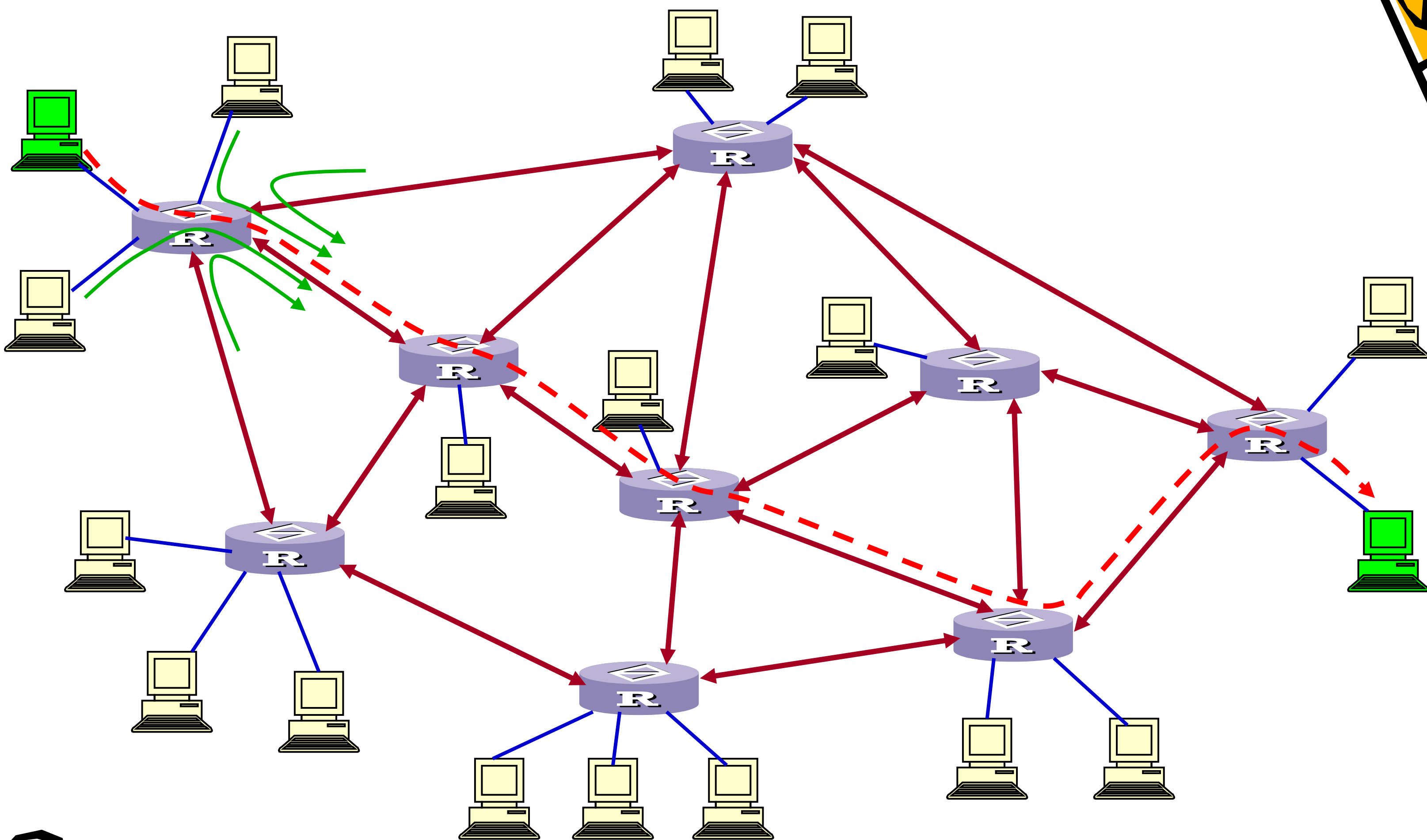
แต่ละ Router เชื่อมต่อกันด้วย Logical Link เดียว เสมือนว่ามี Transmitter ตัวเดียวในการส่งข้อมูลผ่าน Link

Network Model (M/M/1)



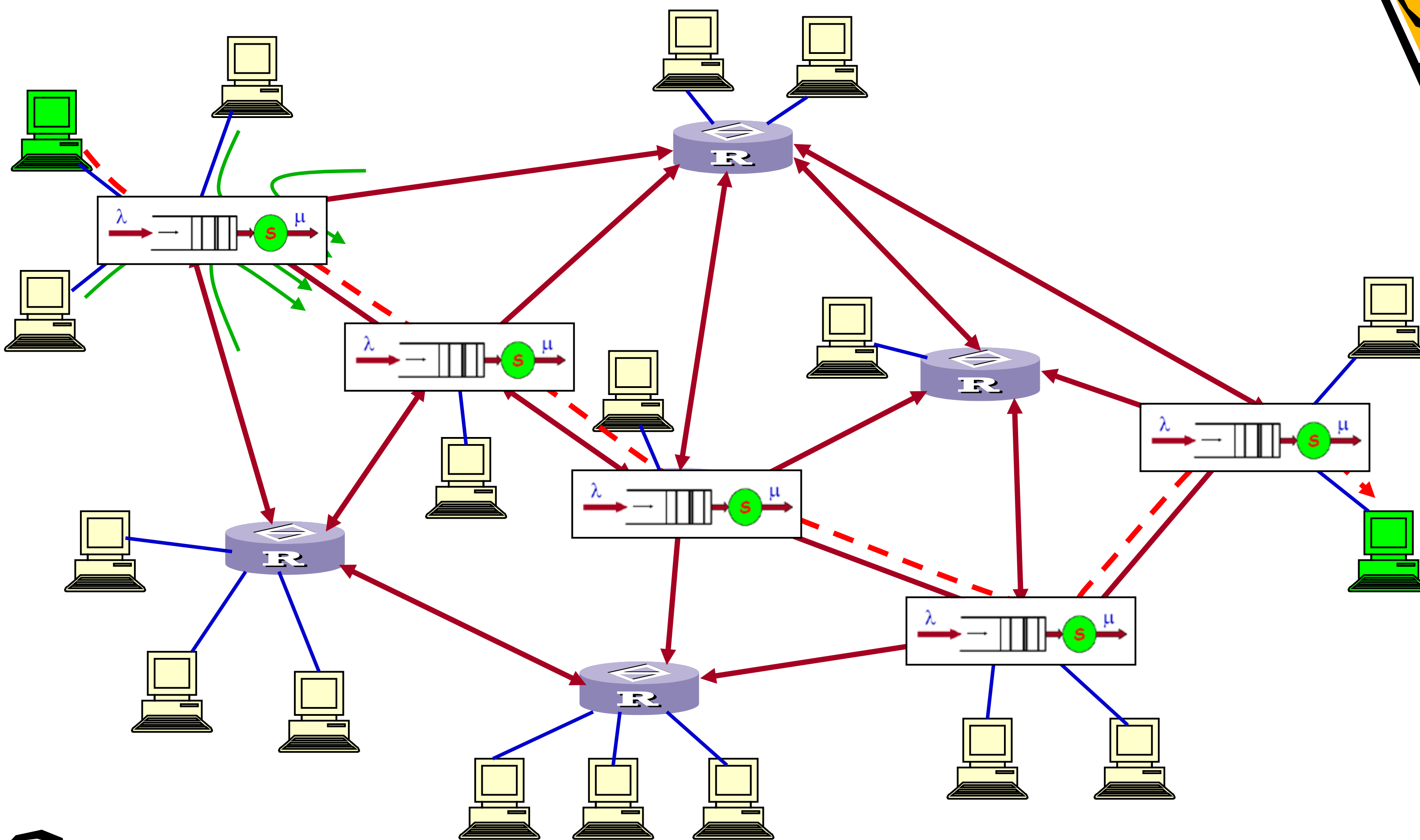
สมมุติว่าคอมพิวเตอร์ที่ต่อกับ Router
ต้องการส่งข้อมูลถึงกัน ตามเส้นทางที่กำหนด

Network Model (M/M/1)



ที่ Output ของ Router สามารถ Model โดยใช้ M/M/1

Network Model (M/M/1)



ถ้าเราให้ทุก Model เป็น M/M/1
ดังนั้น Delay จะเป็นผลรวมของ Delay แต่ละอัน

Kendal Notation

David Kendall[1] ได้คิดการให้ชื่อเพื่อจะอธิบายระบบ Queuing ซึ่งรู้จักกันในนามของ **Kendal Notation** ในรูปแบบดังนี้

$$A / B / c / K / m / Z$$

โดยที่

A หมายถึง Interarrival Time Distribution

B หมายถึง Service Time Distribution

c หมายถึงจำนวนของ Server

K หมายถึง System Capacity หรือ จำนวนของ Customer สูงสุดที่ยอมให้มีในระบบ

m หมายถึง จำนวนของ Population หรือ Source

Z หมายถึง Queue Discipline

Kendal Notation

ปกติที่เราเจอมักอยู่ในรูป Short Notation กล่าวคือ $A / B / c$ โดยสมมุติให้ความยาวของ Queue มีไม่จำกัด ($K = \infty$), จำนวนของ Source มีขนาดไม่จำกัด($m = \infty$) และ Queue Discipline เป็น FCFS(First-come first-serve) หรือ FIFO(First-in first-out)

Distribution ที่ใช้ใน A และ B คือ

GI	General Independent Interarrival Time
G	General Service Time
H_k	k-stage Hyperexponential Interarrival หรือ Service Time Distribution
E_k	Erlang-k Interarrival หรือ Service Time Distribution
M	Exponential Interarrival หรือ Service Time Distribution
D	Deterministic(Constant) Interarrival หรือ Service Time Distribution
U	Uniform Interarrival หรือ Service Time Distribution

Kendal Notation

ส่วนของ Queue Discipline ที่นิยมได้แก่

FCFS หรือ FIFO	First-come first-serve หรือ First-in first-out
LCFS หรือ LIFO	Last-Come First-Serve หรือ Last-in first-out
RSS หรือ SIRO	Random selection for service หรือ Service-in-random order
PRI	Priority Service

Next Week

- M/M/1 Analysis and Examples
- HW 5 Due